Tutorials in Quantitative Methods for Psychology
2008, Vol. 4(1), p. 1-12.
DOI: 10.20982/tqmp.04.1.p001

L'établissement d'une norme de qualification sûre dans un contexte non paramétrique

Louis Laurencelle
Université du Québec à Trois-Rivières

La sélection de personnel pour un emploi se base souvent sur une norme psychométrique qu'un candidat doit atteindre afin d'être recruté. Or, cette norme est statistique, c'est-à-dire calculée sur les mesures d'un simple échantillon de la population concernée, et il s'ensuit une incertitude, voire un risque d'erreur, dans la décision de retenir ou rejeter le candidat. Nous proposons une méthode d'établissement d'une norme psychométrique dont la probabilité d'erreur est strictement contrôlée, une « norme sûre », dont la valeur s'appuie uniquement sur les propriétés de base d'une série statistique, sans modèle paramétrique invoqué.

Personnel selection for a job often uses a psychometric norm that the applicant must reach or surpass in order to be retained. Because this norm is statistical, i.e. based on a sample of values drawn from the population, it is marked with uncertainty and this entails a risk of error in deciding whether to retain or dismiss the candidate. We propose a method for establishing a psychometric norm for which the probability of an erroneous decision is strictly controlled, a "safe norm", calculated using only the fundamental properties of the sampled values, without any recourse to a parametric model.

Dans le but de sélectionner et qualifier une personne pour un emploi, les entreprises moyennes à grandes ont de plus en plus recours au testing psychométrique. Que ce soit pour évaluer des compétences cléricales dans la fonction publique, des qualités de force et d'endurance physique dans les forces de l'ordre ou des habiletés motrices et perceptivo-motrices pour certains métiers, les tests permettent de passer au crible les candidats qui se présentent et de transmettre à l'employeur des recrues qui satisfont certains critères prédéfinis, selon une stratégie d'emploi planifiée. Des règles semblables de sélection et de qualification peuvent s'appliquer aussi pour le cheminement d'élèves en éducation, la détection de conditions pathologiques en médecine et dans d'autres contextes.

Sélectionner, cependant, signifie prendre une décision, c'est-à-dire décréter que la personne évaluée « passe » ou « ne passe pas » le test. Supposons, comme il arrive parfois, que toute la procédure de test aboutisse à un score unique (X_0), que ce score doive être comparé à une valeur de référence, une norme, cette valeur ayant été établie à partir d'une population de référence. Cette norme occupe un rang centile déterminé dans la population, le rang γ ($0 < \gamma < 1$), et peut être dénotée X_γ, de sorte que

$$\Pr\{X \leq X_\gamma\} = \gamma \; ; \qquad (1)$$

c'est d'ailleurs par le rang centile que souvent la norme est définie, dans le but de retenir les meilleurs 20 % (γ = 0,80) ou 5 % (γ = 0,95) de la population. La règle de sélection se formulerait alors :

$$\text{Retenir le candidat si son score } X_0 \geq X_\gamma \,. \qquad (2)$$

En appliquant cette règle, un candidat qui n'atteindrait pas le seuil imposé X_γ serait certain d'être rejeté, alors qu'un qui l'atteindrait serait forcément recommandé. Autrement dit,

$$\Pr\{\text{Retenir le candidat} \mid X_0 = X_\gamma - \delta\} = 0 \qquad (3)$$
$$\Pr\{\text{Retenir le candidat} \mid X_0 = X_\gamma + \delta\} = 1 \,, \quad \text{pour } \delta > 0 \,.$$

Le contexte décrit dans le paragraphe précédent est idéal, et il est utopique d'en espérer la réalisation. En fait, à moins de disposer de moyens financiers colossaux, les entreprises ne mesurent pas toute la population : elles doivent se contenter d'un groupe normatif — un échantillon représentatif de la population de référence, d'une taille suffisante pour assurer la précision voulue des centiles cherchés (Laurencelle 1998) — échantillon à partir duquel il faudra estimer approximativement la norme voulue. Or, cette norme approximative, disons L_γ, puisque basée sur *un échantillon aléatoire de* n *éléments*, a les propriétés d'une statistique, notamment une espérance (et un biais) et une variance d'erreur (Laurencelle 2000). Quelles que soient la méthode appliquée pour déterminer la norme : linéaire[1], ordinale (voir plus loin) ou autre, ou la distribution de X, nous avons, approximativement :

$$\mathrm{E}\{ L_\gamma \} = X_\gamma \pm \sigma \times o(1/n) \qquad (4)$$

et

$$\mathrm{var}\{L_\gamma\} \sim \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{1}{(f_{X_\gamma})^2}, \qquad (5)$$

« f_X » dénotant la fonction de densité de la variable X. Ainsi, même si la norme approximative L_γ a un biais d'ordre $1/n$, c'est-à-dire relativement faible ou nul, elle est marquée d'une variance d'erreur, une incertitude, qui varie selon γ et inversement selon n. Cette incertitude de la norme statistique fait en sorte que, comparativement à (1),

$$\Pr\{ X \le L_\gamma \} \approx \gamma . \qquad (6)$$

En outre, l'application de la règle empirique :

$$\text{Retenir le candidat si son score } X_0 \ge L_\gamma \qquad (7)$$

répercute l'incertitude de la norme estimée, de sorte que, pour un candidat dont le score X_0 approcherait la norme L_γ à une petite distance δ, nous aurions :

$$\Pr\{ \text{Retenir le candidat} \mid X_0 = L_\gamma \pm \delta \} \approx ½ . \qquad (8)$$

Ainsi, quelqu'un pourrait se voir recommander comme qualifié alors qu'en fait il ne l'est pas ou, dans une autre situation, une personne qualifiée aurait une probabilité non nulle de se voir refuser l'emploi.

Le risque de commettre une décision de sélection erronée à partir d'une norme statistique dépend de deux facteurs : le type d'erreur qu'on veut contrôler et l'écart du score obtenu X_0 par rapport à la norme. L'erreur elle-même peut consister soit à admettre quelqu'un qui ne serait pas qualifié : pour contrer ce risque, nous avons besoin d'une norme *exigeante* ; ou bien l'erreur peut être de refuser l'admission à quelqu'un qualifié, ce qui justifie la norme *permissive*. Quant à l'écart entre score obtenu et norme, la probabilité de commettre une décision erronée va évidemment varier avec lui. Ainsi, pour quelqu'un non qualifié (i.e. $X_0 < X_\gamma$), la probabilité d'être sélectionné (i.e. $X_0 \ge L_\gamma$) dépend à la fois de son score et de la norme L_γ appliquée, d'où :

$$\Pr\{ X_0 \ge L_\gamma \mid X_0 < X_\gamma \} \to 0 \;\text{ si } L_\gamma - X_0 \to \infty .$$

Or, comme on ne peut modifier la valeur obtenue X_0, il faut plutôt *relever* la norme approximative appliquée, soit :

$$\Pr\{ X_0 \ge L_\gamma' \mid X_0 < X_\gamma \} \to 0 \;\text{ si } L_\gamma' \to \infty .$$

Dans un tel cas, la *norme sûre exigeante* (L_E) sera telle que la probabilité qu'une personne tout juste non qualifiée soit sélectionnée est d'au plus α, ou

$$\max \Pr\{ X_0 \ge L_E \mid X_0 < X_\gamma \} = \alpha \qquad (9)$$

Réciproquement, pour réduire à un seuil convenu le risque de refuser une personne qualifiée, il faut abaisser la norme approximative appliquée, définissant ainsi la *norme sûre permissive* (L_P) par

$$\max \Pr\{X_0 < L_P \mid X_0 \ge X_\gamma\} = \alpha \qquad (10)$$

Dans le contexte paramétrique du modèle normal, ont été développés les concepts d'*intervalle de tolérance* et de *limites de tolérance* (Wilks 1941, Wald et Wolfowitz 1946, Kendall et Stuart 1979), proches parents de la « norme sûre » applicable en psychométrie. Laurencelle (2000, 2002) documente et développe la notion de norme sûre à modèle normal, définissant ainsi des normes exigeantes ou permissives soit en mode unilatéral (comme ci-dessus), soit en mode bilatéral. L'intervalle et les limites de tolérance ont aussi été développés pour d'autres modèles paramétriques (p. ex. Hanson et Koopmans 1964, Bain et Weeks 1965). Qu'arrive-t-il, toutefois, si le modèle paramétrique n'est pas spécifié ou s'il ne peut pas être établi avec assurance?

En l'absence d'un modèle paramétrique, qui fournirait la fonction de répartition F_X et la fonction de densité f_X de la variable X, il reste le recours aux propriétés fondamentales de la série statistique $\{ X_1\ X_2 \ldots X_n \}$, notamment celles liées aux statistiques d'ordre ($X_{(1:n)}, X_{(2:n)}, \ldots, X_{(n:n)}$), notées plus simplement ($X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$). La seule utilisation de cette série, en dehors de toute invocation paramétrique, permet en effet de définir une norme approximative, le centile statistique C_γ, comme estimateur du vrai centile X_γ, tel qu'il délimite une proportion γ inférieure de la population. L'une des fonctions d'estimation possibles est :

$$C_\gamma = X_{(\,\gamma[n+1]\,):} \qquad (11)$$

c'est la norme ordinale, marquée elle aussi d'un léger biais et d'une incertitude[2] dont nous allons expressément tenir compte.

En supposant maintenant que toutes les mesures considérées proviennent d'une même population X à répartition F_X inconnue, alors la série :

$$(\, F(X_{(1)}), F(X_{(2)}), \ldots, F(X_{(n)}) \,)$$

équivaut à la série

$$(\, U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)} \,) ,$$

soit les statistiques d'ordre de la variable uniforme standard, de distribution $U \sim (0, 1)$. Les propriétés de cette série, via un calcul par la loi binomiale, vont permettre de définir une

[1] L'estimation *linéaire* d'un centile normal de rang γ est obtenue par $L_\gamma = \bar{X} + s_X \times z_{1-\gamma}$, où $z_{1-\gamma}$ est le centile correspondant de la loi normale standard.

[2] La variance d'erreur d'un centile (ordinal) de rang γ est (à l'ordre $1/n$) de $\sigma^2/n \times \gamma(1-\gamma) \,/\, [\, f(X_\gamma)]^2$. Laurencelle (2000) élabore sur cette question.

norme non paramétrique à risque contrôlé, que nous désignons « norme ordinale sûre ».

STATISTIQUES D'ORDRE ET PROBABILITÉS BINOMIALES

La norme ordinale, ou non paramétrique, se réfère donc, non pas à la métrique de la variable X considérée ni aux paramètres (tels que μ_X et σ_X) qui contrôlent sa distribution, mais seulement à ses propriétés d'ordre telles qu'elles sont implicitement transposées dans la variable uniforme U via la transformation intégrale $U = F(X)$, où U varie uniformément de 0 à 1. Si, comme il se doit, l'ensemble des n données normatives $\{ X_1\ X_2 \ldots X_n \}$ constitue un échantillon aléatoire de la population X, la série équivalente virtuelle $\{ U_1\ U_2 \ldots U_n \}$ est elle aussi un échantillon aléatoire de la population U, cette fois avec des propriétés connues. Par exemple, si n est pair, la probabilité que la moitié ($n/2$) des valeurs U_i soient inférieures à la médiane paramétrique $U = 0{,}5$ est facilement calculée[3]. Rappelons maintenant certaines propriétés des statistiques d'ordre ($U_{(1)}$, $U_{(2)}$, …, $U_{(n)}$), à partir desquelles la norme sûre sera élaborée (David 1981, Kendal et Stuart 1979).

Posons d'abord que $U_{(1:n)}$ tient lieu de $X_{(1:n)}$, la valeur obtenue la plus petite de la série normative$\{ X_1\ X_2 \ldots X_n \}$. De même, $U_{(n:n)}$ représente $X_{(n:n)}$, la valeur la plus grande, et $U_{(r:n)}$ dénote et remplace la r^e valeur la plus petite, soit $X_{(r:n)}$. Ainsi, pour $U_{(n:n)}$, c.-à-d. la plus grande statistique d'ordre, la probabilité qu'elle soit inférieure ou égale à une valeur U donnée est aussi la probabilité que les n statistiques de la série U_i soient toutes inférieures à U, soit $G_{U(n:n)}(U) = U^n$. De même, la probabilité qu'un élément U_i soit supérieur à la valeur U étant $(1–U)$, la probabilité qu'ils soient tous supérieurs est $(1–U)^n$, de sorte que, pour $U_{(1:n)}$, la plus petite statistique de la série, la probabilité qu'elle soit *inférieure* à U est le complément de cette probabilité, $G_{U(1:n)}(U) = 1 - (1–U)^n$. En général, la fonction de répartition[4] de $U_{(r:n)}$ dénote la probabilité qu'au moins r parmi les n statistiques U_i soient inférieures ou égales à U, ou

$$G_{U(r:n)}(U) = \Pr \{\text{au moins } r\ U_i \text{ sur } n \le U\}$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} U^i (1-U)^{n-i} . \qquad (12)$$

C'est cette fonction $G_{U(r:n)}(U)$, notée plus simplement $G_{r,n}(P)$, qui servira à définir notre norme ordinale.

[3] Soit $p = {}_nC_{n/2}\ (½)^n$.

[4] Pour le lecteur intéressé, la fonction de densité de $U_{(r:n)}$ est $g_{U(r:n)}(U) = r \binom{n}{r} U^{r-1} (1-U)^{n-r}$

DÉFINITION ET CALCUL D'UNE NORME ORDINALE UNILATÉRALE

Nous voulons définir une norme, un seuil, tel qu'il servira à sélectionner les candidats appartenant à la fraction $(1 - \gamma)$ supérieure[5] de la population par la règle :

$$\text{Retenir le candidat si son score } X_0 \ge X_{(r:n)} , \qquad (13)$$

en assurant que la probabilité de commettre une erreur de décision n'excède pas un niveau convenu α. Noter qu'ici, la norme $X_{(r:n)}$ est attachée à une statistique d'ordre, dont les paramètres r et n sont contrôlés à travers la variable équivalente U.

Norme unilatérale exigeante. La norme exigeante a pour fonction de réduire à α la probabilité de retenir (par $X_0 \ge X_{(r:n)}$) une personne qui en fait ne serait pas qualifiée (selon $X_0 < X_\gamma$), soit :

$$\max \Pr\{ X_0 \ge X_{(r:n)} \mid X_0 < X_\gamma \} = \alpha . \qquad (14)$$

Or, quelqu'un de tout juste non qualifié aurait un score X_0 proche de X_γ, et son $U_0 = F(X_0)$ serait proche de γ. Il s'agit donc de solutionner pour r ou n l'inéquation :

$$\Pr\{ U_0 \ge U_{(r:n)} \mid U_0 < \gamma \} \le \alpha \qquad (15)$$

soit : $\Pr\{ \gamma \ge U_{(r:n)} \} \le \alpha$

ou : $\Pr\{ U_{(r:n)} \le \gamma \} \le \alpha$

ou : $$G_{r,n}(\gamma) \le \alpha . \qquad (16)$$

Prenons, par exemple, $\gamma = 0{,}90$, $\alpha = 0{,}05$ et $n = 100$. Cherchant le rang r approprié, on trouve $G_{95,100}(0{,}90) \approx 0{,}0576$ puis $G_{96,100}(0{,}90) \approx 0{,}0237 \le \alpha$; la norme à appliquer pourrait être $X_{(96:100)}$, et la règle consisterait à retenir les candidats obtenant $X_0 \ge X_{(96:100)}$. Il est intéressant de noter que, en retenant la norme $X_{(96:100)}$, nous obtenons une sélection effective de $\gamma' = r / (n+1) = 96 / 101 \approx 0{,}95$, donc une sélection plus sévère (comparativement à $\gamma = 0{,}90$) qui nous protège contre une décision erronée. Dans une autre approche, prenons encore $\gamma = 0{,}90$ et $\alpha = 0{,}05$, $r = n - 2$ et cherchant n. On finit par trouver $G_{59,61}(0{,}90) = 0{,}0491$ et $G_{58,60}(0{,}90) = 0{,}0530$, d'où la norme retenue sera $X_{(59:61)}$. Le tableau A1, en annexe, présente quelques valeurs obtenues d'après cette approche, en fournissant la taille n requise pour que la norme au rang indiqué satisfasse les exigences (γ, α, r) imposées.

Norme unilatérale permissive. La norme permissive permet de contrôler le risque de rejeter (par $X_0 < X_{(r:n)}$) une personne qui serait qualifiée (selon $X_0 \ge X_\gamma$), soit :

$$\max \Pr\{ X_0 < X_{(r:n)} \mid X_0 \ge X_\gamma \} = \alpha . \qquad (17)$$

Quelqu'un qui serait tout juste qualifié aurait un score X_0 proche de X_γ, le U_0 frôlant lui-même γ. La proposition à

[5] La sélection dans la tranche $(1–\gamma)$ inférieure est aussi possible (p. ex. si le critère de sélection est un temps d'exécution d'un test ou bien un indice corporel métabolique). Dans un tel cas, il suffira de transposer symétriquement la règle et la norme prescrites.

résoudre est alors :

$$\Pr\{\, U_0 < U_{(r:n)} \mid U_0 \geq \gamma \,\} \leq \alpha \,, \qquad (18)$$

d'où : $1 - \Pr\{\, U_{(r:n)} \leq U_0 \mid U_0 \geq \gamma \,\} \leq \alpha$

et, finalement :

$$\Pr\{\, U_{(r:n)} \leq U_0 \mid U_0 \geq \gamma \,\} \geq 1 - \alpha$$

$$G_{r,n}(\gamma) \geq 1 - \alpha \,. \qquad (19)$$

Reprenant l'exemple avec $\gamma = 0{,}90$, $\alpha = 0{,}05$ et $n = 100$, on trouve, en variant r, $G_{85,100}(0{,}90) = 0{,}9601$ et $G_{86,100}(0{,}90) = 0{,}9274$, ce qui permet d'établir la norme sûre permissive aux paramètres $(r, n) = (85, 100)$, fournissant la valeur normative $X_{(85:100)}$. Notons ici que cette norme permissive se situe évidemment en deçà du rang centile γ, le rang centile trouvé étant $\gamma' = 85 / 101 \approx 0{,}84$ pour un rang visé $\gamma = 0{,}90$.

Le lecteur trouvera au tableau A2 les tailles n requises pour que la norme permissive de rang indiqué convienne aux exigences (γ,α,r) demandées.

Estimation de n. En utilisant la parenté qui unit la somme binomiale et la fonction *Bêta* incomplète, Scheffé et Tukey (1944) ont élaboré une formule qui permet d'estimer le paramètre n requis pour satisfaire approximativement l'équation $G_{r,n}(\gamma) = P$, une fois spécifiées les quantités γ, P et r :

$$n^* \approx \frac{\chi^2_{2r[P]}}{4}\left[\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right] + \frac{1}{2}(r-1) \,. \qquad (20)$$

Dans cette formule, $P = 1 - \alpha$ (Exigeante) ou α (Permissive) selon le cas, et r indique le rang (inférieur) de la norme ; au besoin, obtenir r par $n + 1 - s$ (pour une norme supérieure s). Ainsi, pour notre second exemple de norme exigeante ci-dessus, avec $\gamma = 0{,}90$, $\alpha = 0{,}05$ et $s = n - 2$, nous avons $P = 1 - \alpha$ et $r = n + 1 - (n - 2) = 3$ (équivalant à une norme inférieure de rang 3), et :

$$n^* \approx \frac{\chi^2_{6[1-0{,}05]}}{4}\left[\frac{1+0{,}90}{1-0{,}90}\right] + \frac{1}{2}(3-1)$$

soit $12{,}59 / 4 \times 19 + 1 = 60{,}80 \approx 61$, tel que déterminé ci-dessus par un calcul extensif. Pour une norme permissive satisfaisant (19), avec $\gamma = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01 = P$ et $s = n - 6$, nous avons donc $r = 7$, $\chi^2_{14[0{,}01]} = 4{,}66$ et $n^* = 48{,}435 \approx 48$, encore une fois la valeur correcte dans ce cas.

Interpolation pour la norme unilatérale. La définition d'une norme exigeante $X_{(r:n)}$ par l'équation approximative $G_{r,n}(\gamma) \approx \alpha$ n'est pas toujours exactement possible, surtout en raison du fait que le paramètre « n » n'est pas variable, mais est plutôt imposé par un contexte donné. C'est alors sur le paramètre r, le rang, que l'utilisateur peut jouer afin de déterminer sa norme. Reprenons notre premier exemple, avec une taille imposée $n = 100$, la sélection dans les 10% meilleurs selon $\gamma = 0{,}90$ et un niveau d'erreur $\alpha = 0{,}05$. Par essais et erreurs, nous avons trouvé $G_{95,100}(0{,}90) = 0{,}0576$, puis $G_{96,100}(0{,}90) = 0{,}0237$. Le couple (96, 100) satisfait bien sûr la contrainte « $\alpha \leq 0{,}05$ », mais il est *trop* exigeant, alors que le couple (95, 100) convenait presque. C'est ici que l'interpolation sur le rang r devient possible et intéressante.

L'interpolation proposée procède en deux temps : d'abord, trouver une valeur de r intermédiaire, avec partie fractionnaire, telle que $G_{n,r} \approx \alpha$, ensuite fixer la norme C_γ par une seconde interpolation, cette fois sur X. Pour la première étape, l'étude montre que la relation entre r et $\sqrt{-\ln P}$, P étant la probabilité binomiale, est presque linéaire sur de courts intervalles, ce qui permet l'interpolation. Soit $G_{95,100} = 0{,}0576$ et $G_{96,100} = 0{,}0237$, alors, pour trouver r^* tel que $G_{r^*,n} \approx 0{,}05$, nous faisons

$$r^* = 95+(96-95)\times \left[\sqrt{-\ln 0{,}0576} - \sqrt{-\ln 0{,}05}\right] \Big/ \left[\sqrt{-\ln 0{,}0576} - \sqrt{-\ln 0{,}0237}\right]$$

soit $r^* \approx 95{,}17$. Une autre étude montre aussi que la relation directe entre r et n (avec facteurs γ et α constants) est quasi linéaire elle aussi, permettant l'interpolation sur une autre base. Consultant maintenant le tableau A1, nous voyons que, pour $\gamma = 0{,}90$ et $\alpha = 0{,}05$, les tailles voisines de $n = 100$ sont 89 et 103, respectivement pour des rangs inférieurs r_i de 5 et 6. Le rang inférieur approprié pour $n = 100$, r_i^*, serait donc

$$r_i^* = 5 + (6 - 5) \times [100 - 89] / [103 - 89] \,,$$

soit $r_i^* \approx 5{,}79$, d'où le rang supérieur r à utiliser serait $r^* = n + 1 - r_i^* = 95{,}21$, en excellente approximation de la valeur trouvée par la méthode précédente. Enfin, dans le second temps de l'estimation, il s'agit de déterminer la norme $C_\gamma = X_{(r^*:n)}$ par interpolation sur la série des statistiques d'ordre, entre $X_{(r:n)}$ et $X_{(r+1:n)}$. L'interpolation linéaire reste la voie la plus commode[6], soit :

$$X_{(r^*:n)} = X_{(r:n)} + (X_{(r+1:n)} - X_{(r:n)}) \times (r^* - r) \,.$$

DÉFINITION ET CALCUL D'UNE NORME ORDINALE BILATÉRALE

La documentation disponible (Wilks 1941, David 1981, Rohatgi 1976, Kendall et Stuart 1979) présente un concept qui s'apparente à une norme bilatérale, celui de l'« intervalle de tolérance ». Cet intervalle est borné par deux valeurs L_{inf} et L_{sup}, de telle sorte qu'on est assuré au niveau $1-\alpha$ que ces valeurs embrassent une proportion d'au moins γ de la population[7], c'est-à-dire :

---

[6] Mais pas vraiment la plus précise, surtout aux rangs centiles extrêmes, dans une aile de la distribution. Ainsi, dans le contexte du modèle normal, la relation entre rangs centiles (P) et centiles (Z_P) apparaît fortement non linéaire aux extrémités : la transformation $\sqrt{-\ln P}$ serait alors indiquée avant de procéder à l'interpolation.

[7] Pour l'intervalle de tolérance ordinal (ou non paramétrique), défini par les statistiques d'ordre $X(r_1)$ et $X(r_2)$, $r_1 < r_2$, la probabilité que la capacité γ déborde la

$$\Pr\{\ F(L_{\sup}) - F(L_{\inf}) \geq \gamma\ \} \geq 1 - \alpha\ . \tag{21}$$

La séduisante proximité de ce concept avec celui de norme bilatérale explique sans doute les hésitations et erreurs trouvées à ce sujet dans des publications récentes (Laurencelle 1998, 2000), heureusement corrigées plus tard (Laurencelle 2002) pour les normes sûres à modèle normal. En fait, dans une norme bilatérale appliquée dans un contexte psychométrique, il ne s'agit pas d'englober avec assurance une proportion γ de la population, mais d'inclure ou d'exclure un cas particulier selon que son score X_0 s'inscrive dans le corps central, selon $L_{\inf} < X_0 < L_{\sup}$, ou qu'il en déborde, selon $X_0 \leq L_{\inf}$ ou $X_0 \geq L_{\sup}$. Il s'agit ici de normes *ancrées*, c'est-à-dire occupant une position déterminée dans l'axe de mesure X, alors que les bornes de l'intervalle de tolérance classique sont *flottantes*, la largeur seule du filet formé par $L_{\sup} - L_{\inf}$ suffisant à sanctionner l'inclusion.

Nous voulons donc établir une double norme qui servira à discriminer les candidats relevant soit de la portion $(1+\gamma)/2$ supérieure, soit de la portion $(1-\gamma)/2$ inférieure de la population, par rapport à la masse γ des candidats située au centre. Nous envisageons ainsi la règle :

$$\text{Retenir le candidat si son score } X_0 \leq X_{(r\,:\,n)} \text{ ou } X_0 \geq X_{(s\,:\,n)}\ . \tag{22}$$

Bilatérale par définition, cette norme est aussi symétrique dans ses rangs (mais pas forcément dans ses valeurs X), d'où, d'après la correspondance :

$$s = n + 1 - r \tag{23}$$

il suffit de fixer r.

Norme bilatérale exigeante. Supposons que la personne n'est pas qualifiée, selon $X_{(1-\gamma)/2} < X_0 < X_{(1+\gamma)/2}$, et qu'elle ne devrait être retenue ni par en haut ($X_0 \geq X_{(s\,:\,n)}$), ni par en bas ($X_0 \leq X_{(r\,:\,n)}$). Ainsi, nous devons obtenir :

$$\max \Pr\{\ X_0 \leq X_{(r\,:\,n)} \text{ ou } X_0 \geq X_{(s\,:\,n)} \mid X_{(1-\gamma)/2} < X_0 < X_{(1+\gamma)/2}\ \} = \alpha \tag{24}$$

ou :

$$\max \Pr\{\ U_0 \leq U_{(r\,:\,n)} \text{ ou } U_0 \geq U_{(s\,:\,n)} \mid (1-\gamma)/2 < U_0 < (1+\gamma)/2\ \} = \alpha\ . \tag{25}$$

La probabilité de rétention erronée est maximale lorsque U_0 approche l'une des bornes $(1-\gamma)/2$ ou $(1+\gamma)/2$. Prenons indifféremment la borne $(1-\gamma)/2$, alors :

$$\Pr\ \{(1-\gamma)/2 \leq U_{(r\,:\,n)} \text{ ou } (1-\gamma)/2 \geq U_{(s\,:\,n)}\} \leq \alpha \tag{26}$$

Intervertissant les inégalités de (26), nous obtenons :

$$\Pr\{\ U_{(r\,:\,n)} \geq (1-\gamma)/2 \text{ ou } U_{(s\,:\,n)} \leq (1-\gamma)/2\ \}\ , \tag{27}$$

expression que nous pouvons transposer symboliquement comme :

$$\Pr\ \{\ -\text{A ou B}\}, \tag{28}$$

laquelle, par un théorème bien connu, équivaut à l'expression :

$$\Pr\{\ -\text{A}\ \} + \Pr\{\ \text{B}\ \} - \Pr\{\ -\text{A et B}\ \}. \tag{29}$$

Par définition, Pr{ −A } = 1 − Pr{ A }. De plus, l'expression « −A et B » dénote l'événement « $U_{(r\,:\,n)} \geq (1-\gamma)/2$ et $U_{(s\,:\,n)} \leq (1-\gamma)/2$ », impossible puisque $U_{(r\,:\,n)} \leq U_{(s\,:\,n)}$, d'où Pr{ −A et B } = 0. Ainsi, la norme bilatérale exigeante, exprimée par (24), doit satisfaire l'inéquation :

$$1 - \Pr\{\ \text{A}\ \} + \Pr\{\ \text{B}\ \} \leq \alpha\ , \tag{30}$$

soit :

$$1 - G_{r,n}([1-\gamma]/2) + G_{s,n}([1-\gamma]/2) \leq \alpha\ . \tag{31}$$

Par exemple, pour une masse centrale $\gamma = 0{,}95$ avec $\alpha = 0{,}01$ et $n = 500$ données normatives, le calcul pour $r = 6$ fournit $p = 0{,}0139$, et pour $r = 5$, $p = 0{,}0050$, soit la valeur à retenir. La norme bilatérale à retenir serait donc le couple $X_{(5\,:\,500)}$ et $X_{(496\,:\,500)}$. Le lecteur trouvera au tableau A3 certains couples (n, r) ajustés pour cette norme.

Norme bilatérale permissive. La personne est qualifiée, ne faisant pas partie de la masse centrale (γ), selon $X_0 < X_{(1-\gamma)/2}$ ou $X_0 > X_{(1+\gamma)/2}$, mais il y a risque de ne pas la détecter si $X_0 > X_{(r\,:\,n)}$ ou $X_0 < X_{(s\,:\,n)}$. Il s'agit donc de déterminer le triplet (r, s, n) tel que :

$$\max \Pr\{\ X_0 > X_{(r\,:\,n)} \text{ et } X_0 < X_{(s\,:\,n)} \mid X_0 < X_{(1-\gamma)/2} \text{ ou } X_0 > X_{(1+\gamma)/2}\ \} = \alpha\ . \tag{32}$$

Cette probabilité sera maximale pour un candidat tout juste qualifié, c'est-à-dire quelqu'un dont la valeur U_0 approche l'une ou l'autre des bornes $(1-\gamma)/2$ ou $(1+\gamma)/2$. Fixant indifféremment $U_0 = (1-\gamma)/2$, nous avons :

$$\Pr\{\ (1-\gamma)/2 > U_{(r\,:\,n)} \text{ et } (1-\gamma)/2 < U_{(s\,:\,n)}\ \} \leq \alpha` \tag{33}$$

ou :

$$\Pr\{\ U_{(r\,:\,n)} \leq (1-\gamma)/2 \text{ et } U_{(s\,:\,n)} \geq (1-\gamma)/2\ \} \leq \alpha \tag{34}$$

L'expression (34), transposée symboliquement, donne :

$$\Pr\{\ \text{A et } -\text{B}\ \}\ . \tag{35}$$

Utilisant l'égalité Pr{ A et B} + Pr{ A et −B} = Pr{ A }, l'expression (35) devient :

$$\Pr\{\ \text{A}\ \} - \Pr\{\ \text{A et B}\ \}\ . \tag{36}$$

Or, considérant la contrainte $U_{(r\,:\,n)} \leq U_{(s:\,n)}$, qui entraîne $\Pr\{\ U_{(r\,:\,n)} \leq U \mid U_{(s:\,n)} \leq U) = 1$, nous avons Pr{ A et B } = Pr{ B }, d'où, finalement :

$$\Pr\{\ \text{A}\ \} - \Pr\{\ \text{B}\ \} \leq \alpha \tag{37}$$

$$G_{r,n}([1-\gamma]/2) - G_{s,n}([1-\gamma]/2) \leq \alpha\ . \tag{38}$$

Pour la norme bilatérale permissive, selon $\gamma = 0{,}95$ avec $\alpha = 0{,}01$ et $n = 500$ données, l'utilisation de $r = 21$ produit $p = 0{,}0161$, et $r = 22$ produit $p = 0{,}0086$, le couple $X_{(22\,:\,500)}$ et $X_{(479\,:\,500)}$ fixant cette norme (approximativement). Le tableau A4 présente un jeu de couples (n, r) correspondant à cette norme.

---

différence ($X(r_2) - X(r_2)$) est donnée par $1 - \sum {}_nC_i\, \gamma^i(1-\gamma)^{n-i}$, pour $i = 0$ à $r_2 - r_1 - 1$ (Rohatgi 1976). De plus, la taille n requise peut être obtenue par les tables unilatérales correspondantes, en déterminant p. ex. $n - r$, où $r = r_1 + n - r_2$. L'intervalle ainsi défini ne respecte pas cependant les contraintes de la norme bilatérale telle que proposée en (24).

Estimation de n. Nous pouvons remettre en service l'estimation approximative de n (Scheffé et Tukey 1944), telle que concrétisée plus haut par la formule (20). À cette fin, notons d'une part que la couverture bilatérale γ devient ½(1+γ) en mode unilatéral. D'autre part, à la fois pour la norme exigeante (30) et la norme permissive (37), la composante Pr{ B } est typiquement minime, voire insignifiante, de sorte que ces normes correspondent à peu près à Pr{ A } ≤ α et Pr{ A } ≥ 1–α, respectivement. L'approximation (20) devient ainsi :

$$n^* \approx \frac{\chi^2_{2r[P]}}{4}\left[\frac{3+\gamma}{1-\gamma}\right]+\frac{1}{2}(r-1)\,, \tag{39}$$

(en rappelant que $r = n + 1 - s$) : comme dans le cas unilatéral, $P = 1 - \alpha$ pour la norme exigeante, et $P = \alpha$ pour la norme permissive.

Interpolation pour la norme bilatérale. La norme bilatérale permissive donnée en exemple ci-dessus, avec $\gamma = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01$ et $n = 500$, se situe réellement entre $r = 21$ ($P = 0{,}0161$) et $r = 22$ ($P = 0{,}0086$). En interpolant sur r selon P, en fait selon $\sqrt{-\ln P}$, nous estimons $r^* \approx 21{,}77$ pour $P = 0{,}01$. L'interpolation linéaire à partir des couples (n, r) du tableau A4 est plus simple. La probabilité $\alpha = 0{,}01$ est satisfaite pour (n, r) = (477, 21) et (507, 22), d'où $r^* \approx 21{,}77$ pour $n = 500$. La norme plus précise serait donc ici déterminée (interpolant sur X) par le couple $X_{(21{,}77\,:\,500)}$ et $X_{(479{,}23\,:\,500)}$.

PRÉCISION DE LA NORME PRODUITE

En vertu de leur définition, les normes produites respectent évidemment les contraintes de probabilité qu'on leur impose ; c'est pourquoi la question de leur précision métrique apparaît toute secondaire. Il reste que cette précision peut être évaluée, et qu'il est intéressant d'établir le coût en incertitude accrue que ces normes doivent encaisser afin d'honorer le seuil de contrôle d'erreur α qu'elles véhiculent.

Les normes, une fois transcrites dans un contexte d'application réel, vont apparaître dans une métrique X et être concrétisées par une statistique d'ordre $X_{(r\,:\,n)}$, ou par deux dans le cas de normes bilatérales. Dans le but d'évaluer la précision métrique de la norme, la stipulation d'un modèle distributionnel est incontournable : nous retenons ici le modèle normal standard à toutes fins utiles[8]. Le lecteur trouvera dans la littérature spécialisée ce qu'il faut pour déterminer les différents moments des statistiques d'ordre (David et Johnson 1954, David 1981, Laurencelle 2000)[9].

Pour cette étude sur la précision, prenons la norme unilatérale exigeante, et quelques valeurs représentatives de n, ce pour $\gamma = 0{,}90$ et $\alpha = 0{,}05$; les rangs r^* appropriés sont déterminés par interpolation. Le tableau 1 fournit ces valeurs et aussi les calculs relatifs à la norme habituelle, qu'on peut désigner par norme centrale, qui correspond grosso modo à la médiane ($\alpha \approx 0{,}50$) de sa distribution. L'examen du tableau fait voir que non seulement l'incertitude des normes diminue quand n augmente, mais surtout que le coût supplémentaire attaché à la norme sûre, et qui accroît son erreur-type, s'estompe peu à peu avec n, comme le montre le ratio R. Ce coût supplémentaire, les calculs le montrent bien, provient de la position plus extrême de la norme exigeante (le contraire se produirait pour la norme permissive), la statistique d'ordre plus extrême reposant sur une zone distributionnelle de moindre densité, donc à marge d'incertitude plus large.

Tableau 1
Erreurs-types de la norme sûre exigeante ($\gamma = 0{,}90$, $\alpha \le 0{,}05$) et de la norme régulière ($\gamma = 0{,}90$, $\alpha \approx 0{,}50$) pour différentes tailles n de l'échantillon normatif †

n	Norme sûre ($\alpha \le 0{,}05$)		Norme centrale ($\alpha \approx 0{,}50$)		R (%)
	r^*	σ_e	r^*	σ_e	
50	2,30	0,323	5,1	0,245	32
100	5,83	0,205	10,1	0,172	19
150	9,72	0,161	15,1	0,140	15
200	13,78	0,136	20,1	0,121	12
250	17,95	0,120	25,1	0,108	11
300	22,20	0,108	30,1	0,099	9
400	30,88	0,093	40,1	0,086	8
500	39,71	0,082	50,1	0,077	7
750	62,23	0,066	75,1	0,063	6
1000	85,13	0,057	100,1	0,054	5
2500	226,06	0,035	250,1	0,034	3
5000	465,84	0,025	500,1	0,024	2

† Le ratio R indique l'excès de l'erreur-type de la norme sûre par rapport à celle de la norme centrale, soit $R = 100 \times [\sigma_e(\text{sûre}) / \sigma_e(\text{centrale}) - 1]$.

COMPARAISON ET CONVERGENCE DES NORMES ORDINALE ET LINÉAIRE NORMALE

L'examen des données énumérées au tableau 1 laisse voir un rapprochement des rangs interpolés (r^*) de la norme sûre par rapport à ceux de la norme centrale, comme si, en fait, la norme sûre convergeait sur la norme centrale à mesure que n croît. C'est cette convergence que nous avons voulu regarder en préparant les données du tableau 2 ;

[8] Parce que ce modèle demeure la référence la plus plausible et la plus représentative, à côté d'autres modèles intéressants (lognormal, exponentiel, famille *Bêta*, etc.).

[9] La variance d'une statistique d'ordre normale (standard) peut être approchée par $P(1-P) / n\varphi_z^2$, où $P = r / (n+1)$, z est la valeur d'abscisse normale à l'intégrale P et φ est la densité normale à z.

Tableau 2
Évolution des normes sûres ordinales (r^* et z_r) et normales (N) en fonction de n

n	α = 0,05			α = 0,01		
	r^*	z (r^*; n)	N	r^*	z (r^*; n)	N
100	2,24	2,011	1,927	1,26	2,242	2,056
250	7,63	1,875	1,815	5,73	1,999	1,891
500	17,76	1,806	1,763	14,88	1,885	1,814
1000	39,44	1,758	1,727	35,17	1,810	1,762
2500	107,84	1,716	1,696	100,83	1,747	1,718
5000	225,41	1,695	1,681	215,33	1,716	1,693
∞		1,645			1,645	

l'exemple est encore une norme exigeante, cette fois avec γ = 0,95 et deux valeurs de α (α = 0,05 et α = 0,01), norme que nous comparons à la norme sûre à modèle paramétrique normal[10] (Laurencelle 2002) ; ici, la norme centrale, et asymptotique, correspond à l'écart réduit normal Z = 1,645 (délimitant une portion inférieure γ = 0,95 de la population). La figure 1 reprend graphiquement ces données.

La figure 1 montre bien, aussi, que, pour garantir la sûreté définie par le risque d'erreur α, la norme ordinale apparaît régulièrement plus exigeante que la norme à base de modèle normal, la différence s'atténuant cependant pour des tailles n croissantes.

Le choix du type de « norme sûre » à privilégier, soit la norme à modèle normal (Laurencelle 2000, 2002), soit la norme ordinale (ou non paramétrique) présentée ici, dépend de la nature des données disponibles et du fait que l'utilisateur puisse certifier ou non la forme de leur distribution dans la population. Bien sûr, la norme sûre de type non paramétrique peut toujours être appliquée, que le modèle de distribution soit inconnu ou encore rebelle à une transformation normalisante. Toutefois, l'avantage d'une norme de type normal, en termes de coût échantillonnal ou de précision, devrait stimuler le psychométricien à trouver une telle transformation, par exemple la conversion d'une variable lognormale à trois paramètres en une variable normale (voir un cas d'espèce dans Laurencelle 1998, p. 202 et suiv.), afin de bénéficier de la précision et de la puissance du modèle paramétrique normal.

[10] Les normes « normales » (N) présentées au tableau 2 sont tirées de Laurencelle (2002) et d'un volume à paraître du même auteur, *Tables psychométriques*, sauf pour les tailles n = 2500 et 5000, basées plutôt sur une approximation inspirée de Johnson, Kotz et Balakrishnan (1995, éq. 31.26a, p. 520), soit : $N \approx \left(\delta b + Z\sqrt{b^2 + (1-b^2)(\delta^2 - Z^2)}\right) \Big/ \left(b^2 - Z^2(1-b^2)\right)$, où $Z = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, soit le centile (1–α) normal standard, $\delta = \sqrt{n} \times \Phi^{-1}(\gamma)$ et $b = 1 - 1/(4n-4)$.

ÉPILOGUE

La norme sûre, un concept psychométrique basé sur les concepts statistiques de limite de tolérance et d'intervalle de tolérance, est apparue d'abord dans Laurencelle (1998) sous le nom de « norme diagnostique », puis dans Laurencelle (2000) comme « seuil probabiliste » ou « norme d'exclusion », et enfin dans Laurencelle (2002) dans son acception actuelle de « norme sûre », avec ses variantes « exigeante » (ou d'exclusion) et « permissive » (ou d'inclusion), en mode unilatéral et bilatéral, basée alors sur le modèle normal. L'extension du concept et la réexpression de toutes ses variantes dans un cadre non paramétrique, que nous avons réalisées ici, pourraient ouvrir un plus grand champ d'applications pratiques à ce type d'évaluation, que ce soit dans un litige juridique concernant la qualification d'un candidat rejeté, dans une enquête épidémiologique auprès des citoyens, dans un contrôle de qualité de produits usinés ou d'autres contextes. L'avenir seul nous informera de la pertinence réelle de cette approche.

RÉFÉRENCES

Bain LJ, Weeks DL (1965). Tolerance limits for the generalized Gamma distribution. *Journal of the American Statistical Association*, *60*, 1142-1152.

David HA (1981). *Order statistics*. New York, Wiley.

David FN, Johnson NL (1954). Statistical treatment of censored data. I. Fundamental formulae. *Biometrika*, *41*, 228-240.

Hanson DL, Koopmans LH (1964). Tolerance limits for the class of distributions with increasing hazard rates.

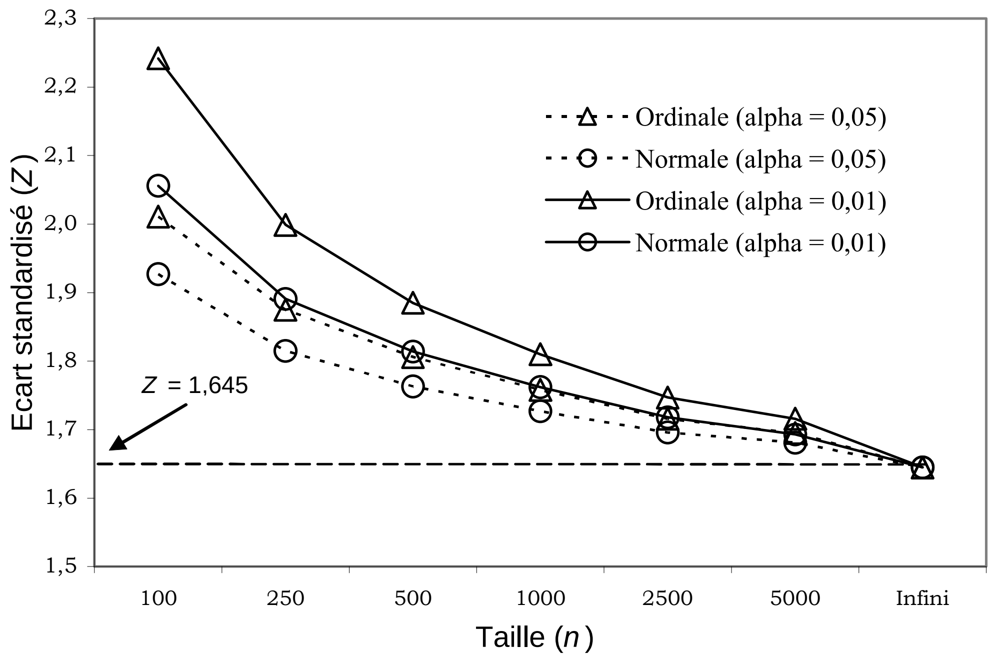

Figure 1. Illustration de la convergence des normes sûres ordinales et normales à γ = 0,95 vers la valeur asymptotique normale Z = 1,645 (telle que $\Phi(1{,}645) = 0{,}95$)

Annals of mathematical statistics, *35*, 1561-1570.

Johnson NL, Kotz S, Balakrishnan N (1995). *Continuous univariate distributions*, *Volume 2* (2e édition). New York, Wiley.

Kendall M, Stuart A (1979). *The advanced theory of statistics. Vol. 2 : Inference and relationship* (4e édition). New York, Macmillan.

Laurencelle L (1993). La loi uniforme : propriétés et applications. *Lettres Statistiques*, *9*, 1-23.

Laurencelle L (1998). Théorie et techniques de la mesure instrumentale. Québec, Presses de l'Université du Québec.

Laurencelle L (2000). L'incertitude des seuils statistiques et les limites de tolérance, avec des applications en psychométrie. Lettres Statistiques, 11, 1-29.

Laurencelle L (2002). L'incertitude des seuils statistiques et l'établissement d'une norme de qualification sûre. *Mesure et évaluation en éducation*, *25*, 19-33.

Rohatgi VK (1976). *An introduction to probability theory and mathematical statistics.* New York, Wiley.

Scheffé H, Tukey JW (1944). A formula for sample sizes for population tolerance limits. *Annals of mathematical statistics*, *15*, 217.

Wald A, Wolfowitz J (1946). Tolerance limits for a normal distribution. *Annals of mathematical statistics*, *17*, 208-215.

Wilks SS (1941). Determination of sample sizes for setting tolerance limits. *Annals of mathematical statistics*, *12*, 91-96.

Manuscript received May 24th, 2007
Manuscript accepted July 31th, 2007

Appendices follow.

ANNEXE.

Tableau A1. Norme ordinale unilatérale exigeante : taille n minimale pour que la norme $X(r)$ ou $X(s)$ n'accepte un candidat non qualifié à γ que selon un taux d'erreur α

Rang		Seuil α = 0,05			Seuil α =0,01		
r	ou s	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99
1	$n-0$	29	59	299	44	90	459
2	$n-1$	46	93	473	64	130	662
3	$n-2$	61	124	628	81	165	838
4	$n-3$	76	153	773	97	198	1001
5	$n-4$	89	181	913	113	229	1157
6	$n-5$	103	208	1049	127	259	1307
7	$n-6$	116	234	1182	142	288	1453
8	$n-7$	129	260	1312	156	316	1596
9	$n-8$	142	286	1441	170	344	1736
10	$n-9$	154	311	1568	183	371	1874
11	$n-10$	167	336	1693	197	398	2010
12	$n-11$	179	361	1818	210	425	2144
13	$n-12$	191	386	1941	223	451	2277
14	$n-13$	203	410	2064	236	478	2409
15	$n-14$	215	434	2185	249	504	2539
16	$n-15$	227	458	2306	262	529	2669
17	$n-16$	239	482	2426	275	555	2798
18	$n-17$	251	506	2546	287	580	2925
19	$n-18$	263	530	2665	300	606	3052
20	$n-19$	275	554	2784	312	631	3179
21	$n-20$	286	577	2902	325	656	3304
22	$n-21$	298	601	3020	337	681	3429
23	$n-22$	310	624	3137	350	706	3554
24	$n-23$	321	647	3254	362	730	3678
25	$n-24$	333	671	3371	374	755	3801

Tableau A2. Norme ordinale unilatérale permissive : taille *n* maximale pour que la norme $X(r)$ ou $X(s)$ ne refuse un candidat qualifié à γ que selon un taux d'erreur α

Rang		Seuil α =0,05			Seuil α = 0,01		
r	ou *s*	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99
1	$n-0$	-	-	5	-	-	-
2	$n-1$	3	7	35	-	3	15
3	$n-2$	8	16	82	5	9	44
4	$n-3$	14	28	137	9	17	83
5	$n-4$	20	40	198	14	26	129
6	$n-5$	27	53	262	19	37	180
7	$n-6$	34	67	329	25	48	234
8	$n-7$	41	81	399	31	60	292
9	$n-8$	48	95	471	37	72	353
10	$n-9$	56	110	544	43	85	415
11	$n-10$	63	125	618	50	98	479
12	$n-11$	71	140	694	57	111	545
13	$n-12$	79	155	771	64	124	612
14	$n-13$	86	171	848	71	138	681
15	$n-14$	94	187	927	78	152	750
16	$n-15$	102	203	1006	85	167	821
17	$n-16$	110	219	1085	92	181	893
18	$n-17$	119	235	1166	99	196	965
19	$n-18$	127	251	1246	107	210	1038
20	$n-19$	135	268	1328	114	225	1112
21	$n-20$	143	284	1410	122	240	1186
22	$n-21$	152	300	1492	130	255	1261
23	$n-22$	160	317	1575	137	270	1337
24	$n-23$	168	334	1658	145	286	1413
25	$n-24$	177	351	1741	153	301	1489

Tableau A3. Norme ordinale bilatérale exigeante : taille n minimale pour que la double norme $X(r)$ et $X(s)$ n'accepte un candidat non qualifié à γ que selon un taux d'erreur α

Rangs		Seuil α =0,05			Seuil α = 0,01		
r	et s	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99
1	$n-0$	59	119	598	90	182	919
2	$n-1$	93	188	947	130	263	1325
3	$n-2$	124	250	1258	165	334	1678
4	$n-3$	153	308	1549	198	399	2006
5	$n-4$	181	364	1829	229	461	2318
6	$n-5$	208	418	2100	259	521	2618
7	$n-6$	234	471	2366	288	579	2910
8	$n-7$	260	523	2627	316	636	3196
9	$n-8$	286	575	2884	344	692	3476
10	$n-9$	311	625	3138	371	747	3752
11	$n-10$	336	675	3389	398	801	4024
12	$n-11$	361	725	3638	425	855	4293
13	$n-12$	386	774	3885	451	908	4559
14	$n-13$	410	823	4130	478	960	4823
15	$n-14$	434	872	4374	504	1013	5084
16	$n-15$	458	920	4616	529	1064	5343
17	$n-16$	482	968	4857	555	1116	5601
18	$n-17$	506	1016	5096	580	1167	5856
19	$n-18$	530	1064	5335	606	1217	6110
20	$n-19$	554	1111	5572	631	1268	6363
21	$n-20$	577	1158	5808	656	1318	6615
22	$n-21$	601	1205	6044	681	1368	6865
23	$n-22$	624	1252	6279	706	1418	7114
24	$n-23$	647	1299	6513	730	1467	7362
25	$n-24$	671	1346	6746	755	1517	7609

Tableau A4. Norme ordinale bilatérale permissive : taille n maximale pour que la double norme $X(r)$ et $X(s)$ ne refuse un candidat qualifié à γ que selon un taux d'erreur α

Rangs		Seuil 0,05			Seuil 0,01		
r	et s	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99	γ = 0,90	γ = 0,95	γ = 0,99
1	$n-0$	-	2	10	-	-	2
2	$n-1$	7	14	71	-	6	30
3	$n-2$	16	33	164	9	18	87
4	$n-3$	28	55	274	17	34	165
5	$n-4$	40	79	395	26	52	257
6	$n-5$	53	105	523	37	73	358
7	$n-6$	67	132	658	48	95	467
8	$n-7$	81	160	797	60	118	583
9	$n-8$	95	189	940	72	142	703
10	$n-9$	110	218	1086	85	167	828
11	$n-10$	125	248	1235	98	193	956
12	$n-11$	140	279	1386	111	219	1088
13	$n-12$	155	309	1540	124	246	1222
14	$n-13$	171	340	1695	138	274	1359
15	$n-14$	187	372	1851	152	302	1498
16	$n-15$	203	403	2009	167	330	1639
17	$n-16$	219	435	2169	181	359	1782
18	$n-17$	235	468	2329	196	388	1926
19	$n-18$	251	500	2491	210	417	2072
20	$n-19$	268	533	2653	225	447	2220
21	$n-20$	284	565	2817	240	477	2369
22	$n-21$	300	598	2981	255	507	2519
23	$n-22$	317	631	3147	270	537	2670
24	$n-23$	334	665	3313	286	568	2822
25	$n-24$	351	698	3479	301	598	2975