

Le tau de Kendall et deux variantes pour mesurer la cohérence de variation entre deux séries ordinales, leurs propriétés et leurs valeurs critiques "honnêtes"

Louis Laurencelle^a

^aUniversité du Québec à Trois-Rivières

Abstract ■ A measure of the consistency of variation in a bivariate series of ordinal data, Kendall's tau (τ) has properties and exhibits distributional characteristics that are distinct from Pearson's r , each coefficient deserving its own interpretation. We examine in detail these properties of the τ and two variants, the τ_b and τ_c , together with the nuances that distinguish them. We then bring out the peculiarities of their probability distribution. The statistical test of the τ gives rise to a forum where different approaches are discussed, including the use of "strict" vs. "honest" critical values and the familiar normal approximation. A fairly extensive table of critical values of both kinds is also provided. ■ Mesure de la cohérence de variation entre deux séries de données ordinales, le tau (τ) de Kendall a des propriétés et présente des caractéristiques distributionnelles distinctes de celles du r de Pearson, chaque coefficient ayant son interprétation propre. Nous examinons dans le détail les propriétés du τ et de deux de ses variantes, le τ_b et le τ_c , de même que les nuances qui les distinguent. Nous mettons ensuite au jour les particularités de leur distribution de probabilités. Le test de significativité du τ donne lieu à une tribune où sont discutées différentes approches, incluant le recours à des valeurs critiques « honnêtes » versus « strictes » et à l'approximation normale classique. Un tableau assez fourni de valeurs critiques des deux sortes est aussi inclus.

Keywords ■ Kendall's tau, variants of tau, honest critical values, monotonicity, normal approximation ■ tau de Kendall, variantes du tau, valeurs critiques honnêtes, monotonie, approximation normale.

Acting Editor ■ Denis Cousineau (Université d'Ottawa)

louis.laurencelle@gmail.com

[10.20982/tqmp.18.2.p196](https://doi.org/10.20982/tqmp.18.2.p196)

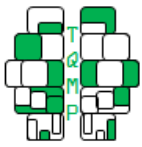
Introduction

L'estimation de la force du lien entre deux quantités observées, leur degré de correspondance, la cohérence de leurs variations, se fait ordinairement au moyen du coefficient de Bravais-Pearson, appelé corrélation et désigné par la lettre r . Appliqué à deux séries de mesures linéaires, le r exprime alors leur degré de variation linéaire proportionnelle, un $r = 1$ (ou -1) dénotant une proportionnalité positive (ou négative) parfaite. Un $r = 0$ représente alors une absence de proportionnalité globale, la relation possible entre les séries pouvant être d'une autre forme.

Or, les données observées en recherche ne sont pas toutes linéaires, l'intervalle entre deux valeurs données restant alors indéterminé, ni proportionnelles d'une série

à l'autre comme le voudrait le coefficient de Bravais-Pearson. En ces cas, le coefficient r perd sa caractéristique distinctive, celle d'informer sur la fonction de correspondance numérique des variations entre les deux séries analysées. De plus, grâce à la non-linéarité présente, la valeur du r devient trompeuse, étant influencée par les intervalles numériquement non valides entre les données des séries exploitées.

Nous nous intéressons ici aux séries ordinales, c'est-à-dire aux séries statistiques constituées essentiellement de valeurs satisfaisant uniquement des relations d'inégalité. Pour exemples, citons les différents paliers du statut socioéconomique d'un citoyen, les rangs attribués par deux juges aux compétiteurs d'un concours, les jalons d'une échelle de mesure de type Likert, la cote de popularité des



villes pour le tourisme. Dans tous ces cas, par exemple, les rangs 2 1 3 4 attribués aux objets a , b , c et d nous informeraient seulement du fait que l'élément b , de rang 1, prime sur les trois autres l'élément, que c , de rang 3, est en avant-dernière position, ainsi de suite. De plus, le lecteur aura compris que la différence numérique entre les rangs n'est pas mesurable, que seules les inégalités de type $b < a$ ou $1 < 2$ sont valides, de sorte qu'il serait abusif de conclure par exemple que la grandeur d'écart entre les données de rangs 1 et 2 est égale à celle des données de rangs 3 et 4.

Comment mesurer le lien de correspondance entre deux séries de données ordinales, sans mettre en jeu les propriétés linéaires des séries de rangs qui leur correspondent ?

Les « tau » de Kendall

Le tau (symbolisé τ) popularisé par Kendall (KENDALL, 1938, 1970, 1978; voir aussi SIEGEL & CASTELLAN, 1988) mesure spécifiquement le degré de cohérence ordinale entre deux séries, sans considération de la grandeur des intervalles entre les données utilisées. À partir des deux séries de n éléments concernées, la mesure se fait en comparant chacune des $\frac{1}{2}n(n-1)$ paires d'écart entre les données d'une série à la paire correspondante de l'autre série : la seule propriété retenue pour la comparaison est la concordance ou la discordance des inégalités des deux paires. Une concordance positive, c.-à-d. que la variation en X est de même signe que la variation en Y , est notée $+1$, tandis qu'une discordance (ou concordance négative) vaut -1 : c'est ce signe, le produit des signes des paires X et Y correspondantes, que nous appellerons « cohérence ». La cohérence ordinale globale est quantifiée par la somme des concordances (positives et négatives) des paires comparées.¹ Cette somme, notée t_{XY} , occupe en principe le domaine $[-\frac{1}{2}n(n-1), +\frac{1}{2}n(n-1)]$, le coefficient de cohérence τ (aussi noté τ_a) étant alors la proportion de cohérence des séries, soit :

$$\tau = \frac{t_{XY}}{n(n-1)/2}. \quad (1)$$

Un coefficient $\tau = 1$ indique une cohérence positive parfaite, c.-à-d. que les séries de données X et Y comparées apparaissent complètement dans le même ordre, le $\tau = -1$, que leurs ordres, cohérents eux aussi, sont complètement l'inverse l'un de l'autre, alors que $0 < |\tau| < 1$ dénote un manque plus ou moins important de cohérence, le $\tau \approx 0$ indiquant une incohérence maximale.

1. Par contraste, le coefficient de Spearman, noté ρ ou r_S et parfois maladroitement présenté comme un compétiteur du τ , est en fait une corrélation linéaire de Pearson appliquée à des rangs, de sorte que les grandeurs d'intervalle entre les rangs de chaque série, p. ex. $r(X_1) - r(X_2)$ ou $r(Y_3) - r(Y_8)$, y sont explicitement exploitées. Le r_S est donc à proprement une mesure de la corrélation (ou proportionnalité linéaire) entre deux séries de rangs plutôt que la correspondance ou cohérence des variations de deux séries de grandeurs ordinales. Il faut noter que, de calcul manuel facile, le r_S a longtemps été utilisé comme un pis-aller commode pour estimer la valeur du r de Pearson; la relation approximative entre les deux coefficients est $r \approx 2 \times \sin(\pi \times r_S/6)$ (KENDALL & GIBBONS, 1990).

Les références déjà fournies donnent des exemples de calcul du τ . SIEGEL et CASTELLAN (1988) et LAURENCELLE (2009) suggèrent aussi une méthode de calcul plus simple que celle déjà évoquée.

Soit la double série X, Y suivante :

Série X : 2 1 5 4 3 $\rightarrow X$ (ordonnée) : 1 2 3 4 5

Série Y : 3 2 4 5 1 $\rightarrow Y$ (compagne) : 2 3 1 5 4.

La méthode simple (non applicable aux séries comportant des valeurs égales ou « liens ») consiste à mettre en ordre la série X et lui comparer la série Y concomitante. Puis, pour chacune des $n-1$ premières valeurs ordonnées de X , on compte le nombre de valeurs Y de rangs plus avancés qui lui sont supérieures. Pour $X_1 = 1$, par exemple, les valeurs Y_i ($i = 2$ à 5) comparées sont 3, 1, 5, 4, où 3, 5 et 4 sont plus grandes, disons 1 (3,5,4). Pour $X_2 = 2$, on a 2 (5,4), pour $X_3 = 3$, on a 3 (5,4) et pour $X_4 = 4$, il n'y en a pas, d'où 4(). Le total des $Y > X$ ainsi comptés est $P = 3 + 2 + 2 = 7$. Le coefficient τ (aussi désigné τ_a , plus loin) est alors $\tau = 4P/[n(n-1)] - 1 = 4 \times 7/(5 \times 4) - 1 = 0,400$.

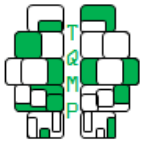
Qu'arrive-t-il toutefois si, dans les séries considérées, certains éléments (ordinaux) sont identiques ou indifférenciés, les « rangs » ou indications ordinales à leur attribuer étant alors égaux ? Prenons un petit exemple, présentant une série de $n = 6$ éléments :

Exemple 1

Série X : 10 18 18 20 26 36 Rangs : 1 2½ 2½ 4 5 6

Série Y : 12 19 12 31 29 33 Rangs : 1½ 3 1½ 5 4 6

Les séries, qui comportent chacune 6 éléments, donnent lieu à $6 \times (6-1)/2 = 15$ paires et comparaisons de paires correspondantes. L'analyse consiste à y repérer et dénombrer les paires concordantes et celles non concordantes. Pour analyser chaque paire (a, b) en X et en Y , la convention adoptée ici attribue à l'inégalité $a < b$ le signe positif $(+1)$ et le signe négatif (-1) à l'inégalité $a > b$; la convention opposée serait tout aussi valable. Dans le cas d'une paire jugée sans inégalité, soit $(a \approx b)$, on utilise le signe nul (0). Pour notre Exemple 1, la première comparaison des données concerne les paires correspondantes $(10 < 18)_X$ et $(12 < 19)_Y$, leurs variations étant concordantes, la cohérence, ici positive, étant donnée par l'expression $(+1) \times (+1) = +1$. Une autre des 15 comparaisons serait $(20 < 26)_X$ vs $(31 > 29)_Y$, les inégalités étant cette fois discordantes, pour un indice de cohérence négative égal à $(+1) \times (-1) = -1$. D'autre part, pour le cas du couple $(18 = 18)_X$: $(19 > 12)_Y$, nous obtenons les signes 0 et



-1, de produit $(0) \times (-1) = 0$ ou nul, c.-à-d. une comparaison non informative, ce qui advient aussi du couple $(10 < 18)_X : (12 = 12)_Y$. Le lecteur pourra vérifier que, parmi les 15 comparaisons de paires disponibles, on dénombre 12 paires concordantes, 1 discordante, d'où un total de $12 - 1 = 11$ « cohérences », puis 2 nulles. Comment calculer les différents indices de cohérence ordinale et quel impact la présence de comparaisons nulles a-t-elle sur le calcul, l'interprétation et la significativité du τ ?

Les autres « tau »

Les trois méthodes de traitement des comparaisons nulles se conjuguent avec autant d'interprétations de leur signification réelle et de leur impact. Avant d'examiner ces méthodes, définissons d'abord certaines quantités pertinentes pour le calcul :

$$\begin{aligned} s_X(i, j) &= \text{signe}(X_i, X_j); \\ s_Y(i, j) &= \text{signe}(Y_i, Y_j), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$t_{XY} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n s_X(i, j) \times s_Y(i, j) \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} t_{aX} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |s_X(i, j)|; \\ t_{aY} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |s_Y(i, j)|; \end{aligned} \quad (2c)$$

$$t_{aXY} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |s_X(i, j) \times s_Y(i, j)| \quad (2d)$$

où $\text{signe}(U_i, U_j) = -1, 0$ ou 1 selon que $U_i > U_j, U_i = U_j$ ou $U_i < U_j$; (2b) contient la somme des "cohérences", (2c) les sommes des paires X ou Y valides, et (2d) la somme des comparaisons valides.

À partir des signes des paires i, j comparées en X et en Y , le total de leurs produits est mis dans t_{XY} , alors que le total des valeurs absolues de leurs produits va dans t_{aXY} : par conséquent, nous avons $t_{XY} \leq t_{aXY} \leq (t_X, t_Y)$, ces derniers étant les totaux des valeurs absolues des signes, respectivement pour les paires de X et de Y . Le tableau 1, qui déploie l'ensemble des comparaisons de paires X et Y correspondantes pour notre Exemple 1, illustre cette notation et les calculs qui s'ensuivent.

La convention proposée nous permet de définir trois coefficients de cohérence ordinale, les deux premiers de Kendall, notés classiquement τ_a et τ_b , et un nouveau que nous proposons, τ_c . Leurs formules, utilisant ici $n = 6$ et

$NC = n \times (n - 1)/2 = 6 \times 5/2 = 15$, sont :

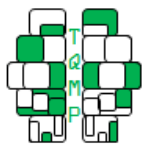
$$\tau_a = t_{XY}/NC = 11/15 = 0,733; \quad (3)$$

$$\tau_b = t_{XY}/\sqrt{t_{aX} \times t_{aY}} = 11/\sqrt{14 \times 14} = 0,786; \quad (4)$$

$$\tau_c = t_{XY}/t_{aXY} = 11/13 = 0,846; \quad (5)$$

- τ_a : Indice de base de KENDALL (1970), le τ_a (3) ou τ exprime la proportion du total de paires cohérentes (t_{XY}) par rapport au nombre de paires possibles (NC), que ces dernières soient « signées » ou non. Noter qu'une comparaison à signe nul n'est pas une covariation et, comme telle, ne peut être considérée ni concordante ni discordante. Le τ_a s'applique ordinairement aux séries ne contenant aucune paire à signe nul. Le coefficient τ_a ignore donc totalement le fait que certaines des NC comparaisons sont non-informatives, alors qu'il les inclut dans le dénominateur de la proportion calculée.
- τ_b : La présence éventuelle de paires « non signées », c.-à-d. à signe nul, a conduit KENDALL (1970) à proposer son indice τ_b (ou τ_{aub}), qui tient compte du contexte des « rangs liés ». Calqué sur la formule de la corrélation de Pearson, le τ_b donne la quotient du total de cohérences (t_{XY}) par rapport à la moyenne géométrique du nombre de variations observées (t_{aX}, t_{aY}) de chaque série, les paires X ou Y à signes nuls étant ainsi exclues du calcul (puisqu'elles sont exclues des sommes t_{aX} et t_{aY}).
- τ_c : Nouvel indice proposé ici, le τ_c écarte lui aussi les comparaisons à signe nul (donc non informatives); il représente la proportion du total de cohérences (t_{XY}) sur le nombre de covariations ou comparaisons valides (t_{aXY}). Cette formulation calque la formule classique du coefficient d'accord « gamma » (γ) de GOODMAN et KRUSKAL (1954), soit $(C - D)/(C + D)$, où C et D sont respectivement les nombres d'accords et de désaccords entre deux sources.

Deux autres conceptions sont envisageables pour la mesure de cohérence appliquée aux séries ordinales comportant des comparaisons nulles. La première consiste à supposer que, les objets (a, b) considérés étant de grandeurs 'presque égales', la source X , d'où proviendraient les scores attribués, n'a pu se décider alors que, dans le cas contraire, elle aurait opté soit pour l'attribution $a < b$, soit pour $a > b$, avec probabilité applicable de $1/2$. La probabilité de concordance ou de discordance avec la source Y , confrontée pareillement, aurait donc été de $1/2$. De là, l'apport global attendu de cette résolution de l'égalité apparente serait nul, soit $1/2(-1) + 1/2(+1) = 0$, contribuant ainsi à réduire la proportion de cohérence clairement indiquée par τ_c jusqu'à la valeur du τ_a . La seconde conception voudrait que, plutôt qu'être réparti également au hasard entre concordance et non concordance, l'accord explicite entre les sources X et Y , tel qu'évalué par les seules com-

**Tableau 1** ■ Comparaisons des paires correspondantes des séries X , Y de l'Exemple 1.

paire X	paire Y	s_X	s_Y	$s_X \times s_Y$
10<18	12<19	1	1	1
10<18	12=12	1	0	0
10<20	12<31	1	1	1
10<26	12<29	1	1	1
10<36	12<33	1	1	1
18=18	19>12	0	-1	0
18<20	19<31	1	1	1
18<26	19<29	1	1	1
18<36	19<33	1	1	1
18<20	12<31	1	1	1
18<26	12<29	1	1	1
18<36	12<33	1	1	1
20<26	31>29	1	-1	-1
20<36	31<33	1	1	1
26<36	29<33	1	1	1
Total simple				$t_{XY} = 11$
Total absolu	$t_{aX} = 14$	$t_{aY} = 14$		$t_{aXY} = 13$

paraisons concluantes (non nulles), s'étendrait implicitement aux comparaisons ambiguës ou plus difficiles, ce qui, en incorporant cette information collatérale, ramènerait cette fois la proportion estimée à celle du coefficient τ_c . Ces deux conceptions, mathématiquement redondantes et spéculatives, permettent tout de même d'élargir le champ des interprétations possibles des coefficients τ_a et τ_c , cela en considération des contextes de mesure auxquels l'utilisateur est confronté.

Un second exemple, tiré de KENDALL et GIBBONS (1990, p. 41), permettra au lecteur de se familiariser avec les calculs. Les valeurs fournies sont des rangs; les valeurs égales (ou « rangs liés ») avec ou sans partie fractionnaire, dénotent des grandeurs sous-jacentes jugées égales.²

Exemple 2

Série X	1	2,5	2,5	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9,5	9,5
Série Y	1	2	4,5	4,5	4,5	4,5	8	8	8	10

L'examen des deux séries fait voir 4 groupes de liens sur 2 valeurs en X et 2 groupes en Y , l'un sur 4 valeurs et l'autre sur 3. Le lecteur peut vérifier les résultats suivants : $\tau_a = 0,733$; $\tau_b = 0,859$; $\tau_c = 1,000$ Pour le lecteur paresseux, la note infrapaginale³ fournit la valeur des ingrédients (2a) à (2d) utiles au calcul de nos trois coefficients.

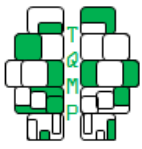
2. L'attribution des rangs de 1 à n pour les n valeurs de chaque série obéit à la règle habituelle consistant à préserver le domaine (1 .. n) du classement, c.-à-d. donner à chaque valeur unique le numéro de rang qu'elle occupe dans la série et à chaque valeur d'un groupe de valeurs égales la *moyenne des rangs qu'elles auraient occupés si elles avaient été différentes*. Dans la série Y par exemple, les valeurs occupant les cases 3, 4, 5 et 6 étant égales, le rang attribué à chacune est $(3 + 4 + 5 + 6)/4 = 4,5$.

3. Les valeurs des ingrédients du calcul des coefficients τ associées à l'Exemple 2 sont : $n = 10$, $NC = 45$, $t_{XY} = 33$, $t_{aX} = 41$, $t_{aY} = 36$, $t_{aXY} = 33$.

4. En fait, les arrangements constatés pour les séries X et Y sont qualifiés plus rigoureusement de « monotones » ou de non décroissants, c'est-à-dire admettant les égalités.

Un essai d'interprétation des coefficients τ_a , τ_b et τ_c

La cohérence positive traduite par les trois coefficients indique que l'arrangement croissant des éléments en X tend à concorder avec celui des éléments en Y . Le degré de cohérence ordinaire de ces séries est-il de 0,733, ou bien de 1,000, ou bien de 0,859? En fait, chaque coefficient reflète un aspect, une facette particulière de la cohérence ordinaire des deux séries et, pour cette raison, chacun mérite réflexion. Si le contexte de l'étude et la nature des variables (X , Y) traitées le justifient, on pourrait considérer que les comparaisons formées de valeurs égales, de signe 0, ne nous informent en rien sur la concordance des comparaisons entre séries, donc qu'on peut les ignorer. Le coefficient le plus net pour cette interprétation est le τ_c , pour lequel seules les comparaisons « signées » et informatives sont considérées. Ici, dans l'exemple 2 où la série X est déjà placée en ordre croissant, on voit que la série Y avance elle aussi en ordre croissant⁴, sans variations contraires, et que le τ_c parfait de 1,000 reflète bien globalement ce qu'on voit. Le τ_b , basé sur la même idée que le τ_c mais obtenu par une formule calquée sur celle du r de Pearson, donne 0,859, une quantité qui n'est plus une proportion de variations cohérentes, mais le rapport de covariance des



signes X et Y sur la moyenne géométrique de leurs variances respectives, un rapport qui reste difficilement interprétable dans le présent contexte. Rappelons que, pour des séries dépourvues de paires égales, les trois coefficients donnent le même résultat, les ingrédients t_{aXY} , t_{aX} et t_{aY} étant alors tous égaux à $1/2 \times n(n-1)$.

Les quelques propriétés connues du τ_a et la significativité des trois τ

Les moments. La distribution de probabilité du coefficient τ est, comme lui, discrète et dépend des $n!$ permutations d'ordre de l'une des deux séries. L'énumération et l'analyse détaillée des permutations est vite prohibitive, même par ordinateur (p. ex. $10! = 3.628.800$ et $20! \approx 2,42 \times 10^{18}$). Kendall (1938; voir aussi Laurencelle, 2009) offre deux méthodes récursives sur n pour obtenir directement la distribution de fréquences du τ_a , l'estimation par simulations Monte Carlo restant toujours disponible.

Pour le τ_a , la littérature rapporte les quatre premiers moments statistiques, soit :

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ \sigma^2 &= \frac{4n+10}{9n(n-1)}, \\ \gamma_1 &= 0, \\ \gamma_2 &= -\left(\frac{6}{5}\right) \frac{6n^3 + 21n^2 + 31n + 31}{n(n-1)(2n+5)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

La distribution de hasard du τ_a est symétrique autour 0, sa variance décroît normalement selon $n-1$ et sa légère platykurtose, qu'on estime très bien par $\gamma_2 \approx -2/(n-1)$, autorise rapidement l'approximation normale, soit :

$$z = \frac{\tau \pm 2/[n(n-1)]}{\sigma}, \quad (7)$$

et $p(z) = 1 - \Phi(z)$, où Φ désigne l'intégrale de la loi normale standard. KENDALL et GIBBONS (1990, p. 66) rapportent l'expression plutôt lourde de la variance du τ_b , celle en fait du numérateur t_{XY} :

$$\sigma^2(\tau_b) = \sigma^2(t_{XY}) / (t_{aX} \times t_{aY}); \quad (8a)$$

5. Les valeurs des coefficients, gouvernées par leur numérateur t_{XY} , sont non seulement discontinues, mais aussi auto-cumulatives, c.-à-d. que chacune représente d'une à plusieurs permutations parmi les $n!$ possibles pour la même valeur de τ . Le passage d'une valeur donnée du τ à la valeur suivante se fait donc par paquet de simulations équipotentes, de sorte que la distribution cumulative de probabilités croît de bloc en bloc, irrégulièrement. Par exemple, pour une série X, Y de longueur $n = 5$, le $\tau_a = 1,000$ a une probabilité unique de $1/5! \approx 0,0083$ tandis que la valeur suivante ($\tau_a = 0,800$) occupe une bande de probabilités de 0,0167 à 0,0417, la suivante ($\tau_a = 0,600$) de 0,0500 à 0,1167, ainsi de suite. La valeur critique au seuil $\alpha = 0,01$, par exemple, n'est pas précisément rejointe, d'autant moins qu'il y a 4 permutations qui nourrissent l'intervalle entre les τ_a de 0,0083 et 0,0167, et 9 entre 0,0167 et 0,0500.

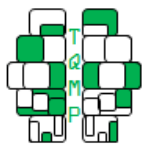
$$\begin{aligned} \sigma^2(t_{XY}) &= \frac{1}{18} \left(n(-1)(2n+5) \right. \\ &\quad \left. - \sum u(u-1)(2u+5) - \sum v(v-1)(2v+5) \right) \\ &\quad + [9n(n-1)(n-2)]^{-1} \left[\sum u(u-1)(u-2) \right] \\ &\quad \times \left[\sum v(v-1)(v-2) \right] \\ &\quad + [2n(n-1)]^{-1} \left[\sum u(u-1) \right] \left[\sum v(v-1) \right]. \end{aligned} \quad (8b)$$

Les variables u et v dans la partie (8b) de ces expressions représentent respectivement les largeurs de chaque lien dans les séries X et Y . Un lien regroupant trois éléments en X vaut $u = 3$, un de deux éléments en Y en vaut $v = 2$, etc. Quant à la variance du coefficient τ_c , elle n'a pas encore été établie.

À toutes fins utiles, les distributions par combinatoire de nos trois coefficients s'avèrent généralement être les mêmes, dépendant essentiellement du numérateur t_{XY} (2b), le même dans les trois cas. C'est pourquoi, pour une permutation de série donnée, la probabilité cumulative des trois est la même ou à peu près la même pour les trois τ , cela toutefois à des niveaux de valeur τ différents lorsqu'il y a des liens. Pour tester par l'approximation normale la significativité de l'un ou l'autre coefficient, le test plus simple, celui applicable au coefficient τ_a , suffirait donc.

La significativité. Des tables de valeurs critiques du τ_a sont disponibles pour des séries de longueur n restreinte; des valeurs « exactes » ou, plutôt, des valeurs basées sur des calculs exacts, sont disponibles en plusieurs endroits, notamment dans notre référence source (KENDALL & GIBBONS, 1990) de même qu'en appendice de cet article.⁵ L'approximation par un test à base normale est rendue possible par la symétrie de la distribution du τ et sa voussure (ou kurtose) presque gaussienne dès $n = 20$. Toutefois, cette approximation reste quelque peu déficiente jusqu'à $n = 100$, surtout pour les valeurs extrêmes de la statistique : dans ces cas, il est plus sûr d'exploiter des valeurs estimées par simulations Monte Carlo, telles que celles apparaissant aussi en appendice de l'article. Pour l'application d'un test par approximation normale, certains auteurs suggèrent d'appliquer une correction de continuité au numérateur des formules du τ , soit $t_{XY}(corr.) = t_{XY} \pm 1$ ou directement, $\tau(corr.) = \tau \pm 2/[n(n-1)]$.

Reprenant notre Exemple 1, les calculs aboutissent au

**Tableau 2 ■** Calculs des données de l'Exemple 1

Coefficient*	τ	$\sigma(\tau)$	$z(\tau)$	$p(\text{normale})$
τ_a	0,733	0,3549	2,067	0,0194
τ_b	0,786	0,2524	3,113	0,0009
τ_c	0,846	?	-	-
$\tau_a(c)$	0,667	0,3549	1,879	0,0301
$\tau_b(c)$	0,714	0,2524	2,830	0,0023
$\tau_c(c)$	0,769	?	-	-

Note. * Les coefficients marqués $\tau(c)$ ont été réduits par une correction de continuité, soit $\tau(c) = \tau \pm 2/[n(n-1)]$.

tableau suivant (les valeurs positives corrigées $\tau(c)$ sont destinées à l'approximation normale).

L'estimation par simulations Monte Carlo donne $p = 0,022$ pour probabilité extrême des trois coefficients τ_a , τ_b et τ_c . Ce résultat ne repose pas sur une approximation faite par un modèle à variable continue et ne requiert pas l'optionnelle correction de continuité. Dans le cas du présent exemple, ce sont l'approximation normale simple pour le τ_a ou celle corrigée pour le τ_b qui se montrent le plus rapprochées de la probabilité réelle.

À notre connaissance (voir aussi KENDALL & GIBBONS, 1990), il n'existe pas de tables de valeurs critiques ni de calcul de probabilités exactes pour des séries comportant des « rangs liés », l'approximation normale étant à toutes fins pratiques la seule disponible. D'un autre côté, les simulations Monte Carlo, telles les nôtres basées sur 10 000 000 itérations, produisent une estimation (plutôt qu'une approximation par modèle) dotée d'une précision sur p assez élevée, le résultat nous paraissant un substitut plausible à l'hypothétique valeur exacte.⁶ Tel que mentionné plus haut, avec n croissant, la distribution du τ_a (et, vraisemblablement, celles des coefficients cousins) converge vers une loi normale, celle-ci devenant un palliatif acceptable dès $n \geq 20$.

Un dernier exemple, encore sur des séries comportant des valeurs égales, permettra de passer en revue tous les calculs.

Exemple 3

Série X	9	12	12	12	11	14	12	20	18	18	16	24
Série Y	13	13	18	11	15	22	19	17	15	24	22	20

Pour cette double série de longueur $n = 12$, nous obtenons $NC = 66$, $t_{XY} = 26$, $t_{aXY} = 56$, $t_{aX} = 59$, $t_{aY} = 63$. Quant aux liens et leur largeur individuelle,

nous avons en X $u = 4(12)$ et $2(18)$, en Y $v = 2(13)$, $2(15)$ et $2(22)$.

La probabilité réelle obtenue par simulations Monte Carlo est de $p = 0,0365$ pour τ_a et τ_b et $p = 0,0362$ pour τ_c , l'approximation normale la plus juste restant encore celle calculée pour le τ_a . Le tableau 4 reprend ces calculs pour les données de l'Exemple 2. La probabilité réelle estimée, ici de 0,0003, est cette fois mieux approchée par le test normal sur τ_b .

Les valeurs critiques du τ_a : strictes ou honnêtes?

L'ingrédient déterminant du τ , soit les variations concordantes et non concordantes entre les paires de X et de Y , produit une variable discrète, un entier, notre t_{XY} au numérateur du τ . Les valeurs différentes de ce numérateur, variant de $-n(n-1)/2$ à $+n(n-1)/2$ par pas de 2, sont ainsi au nombre de $n(n-1)/2 + 1$, tandis que la combinatoire permutationnelle, qui base la distribution des probabilités est de taille $n!$, soit le nombre de toutes les réalisations aléatoires possibles du τ . Le nombre moyen de réalisations possibles par valeur de t_{XY} est donc donné par le ratio de ces quantités, $n!/[n(n-1)/2 + 1]$. Pour des séries de $n = 5, 7, 10$ et 15 éléments, ce ratio prend les valeurs (arrondies) de 11, 1229, 78887 et $1,234 \times 10^{10}$. Cela veut dire, pratiquement, que chaque valeur individuelle du τ porte un poids de probabilité qui n'est pas unique ou ponctuel (comme dans le cas de la probabilité d'une variable de loi gaussienne, par exemple), mais un agrégat qui représente un ensemble plus ou moins nombreux d'éléments de probabilité.⁷ La probabilité associée à chaque valeur possible du τ ainsi que les valeurs critiques fixées pour différents seuils de significativité dépendent de cette distribution par paquets, créant une certaine ambiguïté dans l'interprétation probabiliste

6. La précision virtuelle de $1/\sqrt{10^7} \approx 0,00032$ de nos simulations est considérablement réduite par le caractère discret et fortement regroupé de la variable t_{XY} . D'un autre côté, le volume échantillonnal appliqué suffit à garantir une bonne stabilité des probabilités cherchées, nos données affichant une correspondance parfaite de celles-ci avec celles découlant de la combinatoire exacte (de taille $n!$) pour $n = 3$ à 14 .

7. En clair, la combinatoire du test étant établie par l'ensemble des $n!$ permutations d'une série de n valeurs X_i par rapport à n Y_i plutôt que par les valeurs du τ elles-mêmes, l'élément de probabilité réel de base est égal à $1/n!$.

8. La même analyse et la même remarque peuvent aussi s'adresser au coefficient de corrélation de rangs (r_S) de Spearman.

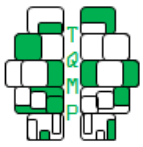


Tableau 3 ■ Calculs de l'Exemple 3

Coefficient*	τ	$\sigma(\tau)$	$z(\tau)$	$p(\text{normale})$
τ_a	0,394	0,2210	1,783	0,0373
τ_b	0,427	0,2322	1,837	0,0331
τ_c	0,464	?	-	-
$\tau_a(c)$	0,379	0,2210	1,714	0,0433
$\tau_b(c)$	0,418	0,2322	1,766	0,0387
$\tau_c(c)$	0,418	?	-	-

Note. * Les coefficients marqués $\tau(c)$ ont été réduits par une correction de continuité.

Tableau 4 ■ Calculs de l'Exemple 2

Coefficient*	τ	$\sigma(\tau)$	$z(\tau)$	$p(\text{normale})$
τ_a	0,7333	0,2485	2,952	0,0016
τ_b	0,8590	0,2723	3,154	0,0008
τ_c	1,0000	?	-	-
$\tau_a(c)$	0,7111	0,2485	2,852	0,0021
$\tau_b(c)$	0,8329	0,2723	3,059	0,0011
$\tau_c(c)$	0,9697	?	-	-

Note. * Les coefficients marqués $\tau(c)$ ont été réduits par une correction de continuité.

du τ .⁸ La détermination des valeurs critiques traditionnellement associées aux différents seuils de significativité α met en jeu cette ambiguïté, et nous nous y tournons tout de suite.

Prenons l'exemple de séries ordinales X et Y de $n = 10$ éléments chacune. Le nombre de valeurs différentes que peut prendre le coefficient τ (nous référons ici toujours au coefficient τ_a , sans comparaisons « nulles ») est de $10 \times 9/2 + 1 = 46$, sa distribution de hasard répond à une combinatoire de $10! = 3\,628\,800$ permutations, pour un nombre moyen d'éléments de probabilité par valeur de τ d'environ 79 000. Comment alors déterminer la valeur critique au seuil α de 0,05 ?

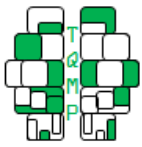
Une fouille (informatique) de la distribution de probabilités cumulatives pc du $\tau(n = 10)$ fournit, près du seuil de référence $\alpha = 0,05$, la $pc(0,467) = 0,036275$, une valeur sous α , et la $pc(0,422) = 0,054157$, une valeur qui déborde α : la valeur critique à définition stricte (ou sévère) sera donc $\tau_{0,01} = 0,467$, comme on la trouve dans tous les manuels. Considérons maintenant de plus près le $\tau = 0,422$. L'intervalle de probabilité entre les τ 0,467 et 0,422, égal à $\approx 0,017882$, correspond exactement à $0,017882 \times 10! = 64889$ permutations des séries, soit le nombre d'éléments de probabilité ponctuels tous associés au $\tau = 0,422$. Or, la pc attachée à ce $\tau = 0,422$, pc qui cumule à 0,054157, au-delà de α , débute d'autre part à 0,036275, juste au-dessus du $\tau = 0,467$ mais sous α . Il y a donc une

part du domaine de probabilité du $\tau = 0,422$ qui satisfait le critère de significativité : quelle est cette part ? On peut évaluer la part de couverture du seuil α imposé au moyen de l'équation

$$\frac{\alpha - pc(\tau_{<\alpha})}{pc(\tau_{>\alpha}) - pc(\tau_{<\alpha})}, \quad (9)$$

où $pc(\tau_{>\alpha})$ et $pc(\tau_{<\alpha})$ dénotent respectivement les probabilités cumulatives attachées au τ débordant α et à son voisin plus extrême. Ici, le calcul donne $(0,05 - 0,036275)/(0,054157 - 0,036275) \approx 0,77$. En résumé, 77% du domaine de probabilité d'un $\tau(n = 10) = 0,422$ satisfont le critère $\alpha = 0,05$; autrement dit, on a ici 77% de chances d'avoir raison en affirmant qu'un tel résultat atteint le seuil de significativité prescrit. Pour le même format de séries, qu'en est-il du seuil $\alpha = 0,01$? Dans ce cas, nous trouvons la $pc(0,600) = 0,008333$, une valeur sous α , et la prochaine, $pc(0,556) = 0,014305$, une valeur qui déborde α : la valeur critique à définition stricte (ou sévère) sera donc $\tau_{0,01} = 0,600$. Or, la part significativement sensible du domaine de probabilité du $\tau = 0,556$, soit $(0,01 - 0,008333)/(0,014305 - 0,008333) \approx 0,28$, est de 28%, le risque de faussement déclarer significatif un $\tau(n = 10) = 0,556$ étant ici de 72%.

Un autre exemple, de calcul exact lui aussi, concerne la valeur critique du $\tau(n = 14)$ au seuil $\alpha = 0,05$. La valeur stricte serait $\tau = 0,363$, plafonnant à $pc = 0,039728$, tandis que la valeur inférieure, $\tau = 0,341$, se rend jusqu'à



0,050510, incluant donc 95% d'éléments de probabilité satisfaisant le seuil α et l'atteignant, tandis que toutes les probabilités associées à la valeur stricte 0,363 lui sont peu ou prou inférieures.

L'analyse ci-dessus soulève un paradoxe quant à la procédure de déclaration d'un résultat significatif, voire d'un énoncé de probabilité lorsqu'il s'agit d'une statistique construite sur des données discrètes : c'est le cas du tau de Kendall, établi sur le nombre de variations concordantes ou non entre deux séries de mesures. L'énoncé suivant : « Le résultat est significatif au seuil α de 0,05 » ou, dans une autre formulation : « La probabilité que le τ observé provienne d'un contexte de pures variations aléatoires respecte le seuil de significativité prescrit », reste une sorte de gageure, une prédiction sur le comportement d'une mesure dans un contexte stochastique, comportant éventuellement des influences structurantes mais aussi une part plus ou moins importante de variations au hasard. Pour le τ de Kendall et les statistiques de construction semblable (r_S de Spearman, $khi2$ de Pearson, pourcentage d'accords etc.), les seuils de probabilité sont rarement sinon jamais⁹ atteints ponctuellement et les valeurs critiques proposées correspondent non pas à une probabilité ponctuelle mais à un domaine de probabilité, à proximité du seuil α choisi : c'est ce que nous avons démontré plus haut. En vertu de ce flou de probabilité qui enrobe la valeur critique du τ et pour contrer le biais négatif qui s'y rattache, nous proposons de définir une « valeur critique honnête », par opposition à la « valeur critique stricte » qui a cours dans la documentation disponible à ce jour. Voici donc les définitions :

- (10a) Valeur critique stricte (VCS) : valeur de la statistique telle que sa probabilité cumulative (pc) de hasard est inférieure ou égale au seuil α prescrit.
- (10b) Valeur critique honnête (VCH) : valeur de la statistique telle que la proportion de significativité valide de son domaine de probabilité (formule 9) est de 0,50 ou davantage.

Utiliser la VCS, tel que proposé dans les manuels et traités courants, entraîne un biais de sous-estimation systématique de la significativité du résultat, tout le domaine de probabilité de cette VCS étant inférieur à α : des τ empiriques dont la probabilité d'apparition respecterait le seuil mais dont la valeur est supérieure à la VCS seraient déclarés non significatifs. Décision incorrecte, certes, mais aussi affaiblissement de la puissance statistique du test de seuil nominal α . Quant à la VCH, basée ici sur un taux de validité de 50%, elle garantit que la valeur τ testé a au moins 50% de chances d'être inférieure au seuil α et au plus 50% de lui être immédiatement supérieure. Le biais

(de surestimation) est ainsi réduit à presque rien, et la puissance du test rétablie.

L'appendice à cet article propose un ensemble de valeurs critiques (tableau 5), valeurs établies d'après cette perspective « honnête » de détermination. Les valeurs critiques, préparées pour les seuils α de 0,005, 0,01, 0,02 et 0,05, sont présentées sous deux formats, avec ou sans astérisque (*). Le seuil marqué « τ » est le seuil « strict », ou classique, tel que $pc(\tau) \leq \alpha$; celui marqué « τ^* » est le seuil « honnête » quand il existe, un seuil dont la validité est d'au moins 50%; l'utilisateur désirant récupérer le seuil classique correspondant au seuil « honnête » l'obtient facilement par l'équation :

$$\tau = \tau^* + 4/[n(n-1)]. \quad (11)$$

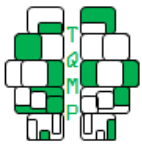
Miscellanées

Le τ_b à partir d'un tableau de fréquences. Certains contextes de recherche, par exemple les sondages d'opinion, mobilisent un grand nombre de sources ou participants dont certaines « mesures » sont de niveau ordinal, la confrontation de deux telles mesures aboutissant à un tableau de fréquences à deux dimensions (p. ex. X et Y). Chaque fréquence inscrite au tableau représente le nombre de participants qui ont opté pour une combinaison donnée de réponses (p. ex., pour X_i et Y_j) Y a-t-il une corrélation ordinaire des réponses entre ces deux dimensions? Le calcul réfère ici au τ_b de Kendall, celui qui traite des séries à comparaisons « nulles » (parce qu'on y enregistre plusieurs options semblables parmi les participants). Kendall et Gibbons (1990; voir aussi Laurencelle, 2009) rapportent une méthode pour faciliter le calcul habituellement lourd du τ_b dans ce contexte.

Question sur la formule du τ_b . KENDALL (1970) cite entre autres l'expression $(C - D)/(C + D)$, une proportion de concordances nette, pour calculer son coefficient τ . Cette expression, algébriquement transformable en la proportion d'accords $C/(C + D)$, est contredite dans sa formule pour le τ_b , soit $t_{XY}/\sqrt{t_{aX} \times t_{aY}}$, laquelle flirte avec la formule du r de Pearson, « covariance divisée par la moyenne géométrique des variances ». Dans la logique du τ , basée sur un taux de cohérence de variation de paires entre X et Y , la division du nombre net de paires concordantes par une mixture ininterprétable de variations ne semble ni éloquente ni explicable. Notre formule proposée d'un τ_c restaure la logique de la proportion d'accords.

La significativité transférable du τ_a . La significativité des différentes formes du τ est liée à la mécanique permutationnelle appliquée aux séries jumelles (X, Y) considérées, et la variable déterminante est essentiellement t_{XY} , la proportion nette de variations concordantes.

9. Sauf exceptions, notamment dans les configurations extrêmes de la combinatoire sous-jacente à la statistique appliquée, p. ex. les cas de séries parfaitement cohérentes et sans égalités pour le τ et le r_S corrélées à +1 ou -1).



Pour cette raison et grâce au facteur « mécanique » de comptage des inégalités de paires, la distribution des probabilités (discrètes) du τ est essentiellement la même pour toutes ses versions, quoi que ces probabilités soient appliquées à des valeurs différentes du τ selon le dénominateur propre à chaque version. Cela signifie que, pour interpréter statistiquement un τ_b , voire un τ_c , l'un de test assez laborieux et l'autre sans test attiré, on peut, pour les mêmes séries, recourir au τ_a et établir sa significativité par l'un des deux moyens disponibles : la valeur critique (au tableau 5, en appendice) et l'approximation normale (7), plus crédible pour $n > 20$. Noter que les valeurs critiques proposées ici ou ailleurs ne requièrent pas la correction pour la continuité, telle qu'appliquée au test par approximation normale.

Le τ comme indice d'une monotonie plus ou moins parfaite. Il peut être intéressant pour une double série (X,Y) donnée de comparer son τ_a à son τ_c , le quotient τ_a/τ_c témoignant de la force de cohérence reliant les séries. En effet, considérons des séries (X,Y) à répétitions de valeurs, dont les deux variables obéiraient au modèle $1\ 2^{n-2}\ 3$. Les séries X et Y sont alors, pour $n = 3$: (1 2 3), pour $n = 4$: (1 2 2 3), pour $n = 5$: (1 2 2 2 3), etc. Les séries construites sur ce modèle présentent toutes un τ_c (ou un τ_b) parfait de 1 alors que, d'autre part, le τ_a s'affaiblit progressivement avec n croissant, depuis un n de 3 avec $\tau_a = 1$, puis 0,833 pour $n = 4$, puis 0,700, puis 0,600, etc. pour les n suivants. Primo, on voit que le τ_c constitue un indicateur fiable de la monotonie de variation entre deux séries; secundo, si pour une série (X,Y) donnée le $\tau_c = 1$ indique sa monotonie, un $\tau_a < 1$ suggère que cette relation de cohérence de variation repose sur un nombre plus ou moins réduit de points d'attache. Le quotient τ_a/τ_c témoigne donc de la finesse de concordance des séries analysées, voire de sa robustesse.

RAVEH (1986) explore tout un florilège d'indices de monotonie applicables à des séries de diverses formes numériques. Rappelons enfin que l'analyse et les tests de monotonie de variation sont d'un intérêt général pour la recherche expérimentale (voir BARLOW, BARTHOLOMEW, BREMNER & BRUNK, 1972; LAURENCELLE, 2021).

Contre-estimation du r de Pearson à partir du τ ou de la probabilité du τ ? Bien sûr, comme on peut s'y attendre, la relation (ordinaire!) entre le τ et le r pour des ensembles de séries bivariées est excellente, et KENDALL (1970) en a proposé une formule algébrique approximative qui convertit le τ en r de Pearson, soit :

$$r \approx \sin(\pi \times \tau/2) \quad (12)$$

En fait, le τ est une mesure statistique moins puissante que le r , en raison de sa combinatoire finie, en plus du nombre restreint de valeurs de τ possibles, soit $n(n -$

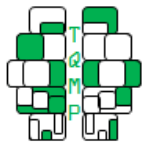
$2)/3 + 1$, un nombre incomparable à celui théoriquement infini de valeurs r possibles. C'est pourquoi, même si elles se marient globalement, les fonctions de répartition (FR) des deux statistiques évoluent différemment, en se lovant l'une à l'autre, la progression de la FR à partir de $\tau = 0$ étant plus lente et s'achevant en sprint du τ vers $\tau = 1$ et -1 : ainsi, τ « sous-estime » r vers les quantiles centraux et vient à le déborder vers les quantiles extrêmes. La contre-estimation du r équivalent à partir de la probabilité du τ paraît donc inopportune : mieux vaut utiliser la formule de Kendall (12), même si elle est imparfaite,

Conclusion

Outil statistique comparativement peu connu et peu utilisé, le tau (τ) de Kendall couvre adéquatement un champ d'analyse statistique souvent traité et mal traité par d'autres approches, particulièrement celles du coefficient r_S de Spearman et du r de Pearson. Pourtant, le τ est LA mesure de cohérence ordinaire entre deux séries de données. S'il intéresse d'abord les données ordinales (basées sur des rapports d'inégalité des grandeurs), il intéresse aussi les données linéaires (basées sur les valeurs des intervalles entre les grandeurs) en ce qu'il est insensible à la loi de répartition des grandeurs analysées et évalue ainsi la force de la concordance de variation monotone entre les deux séries, une condition sous-jacente à toute autre forme de corrélation. Le τ est, pour ainsi dire, l'assise sur laquelle peut s'élaborer la construction plus fine - et plus conditionnelle - de la corrélation linéaire. Nous espérons que ce modeste exposé a pu intéresser le lecteur et contribuer à l'éclairer sur la nature réelle et la fonction utilitaire unique du τ .

Références

- BARLOW, R. E., BARTHOLOMEW, D. J., BREMNER, J. M. & BRUNK, H. D. (1972). *Statistical inference under order restrictions*. Wiley : New York.
- GOODMAN, L. A. & KRUSKAL, W. H. (1954). Measures of association for cross classifications. *Journal of the American Statistical Association*, 49, 732-764.
- KENDALL, M. G. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30, 81-93.
- KENDALL, M. G. (1970). *Rank correlation methods* (4e édition). London : Griffin.
- KENDALL, M. G. (1978). New York : Macmillan.
- KENDALL, M. G. & GIBBONS, J. D. (1990). *Rank correlation methods* (5e édition). Oxford : Oxford University Press.
- LAURENCELLE, L. (2009). Le tau et le tau-b de Kendall pour la corrélation de variables ordinales simples ou catégorielles. *The Quantitative Methods for Psychology*, 5, 51-58.



LAURENCELLE, L. (2021). L'analyse de variation monotone pour les moyennes et les proportions. *The Quantitative Methods for Psychology*, 17, 374-390.

RAVEH, A. (1986). On measures of monotone association. *The American Statistician*, 40, 117-123.

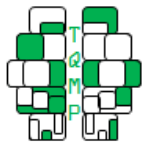
SIEGEL, S. & CASTELLAN, N. J. (1988). *Nonparametric statistics in the behavioral sciences* (2e édition). New York : McGraw-Hill.

Appendice : Tableau 5. Valeurs critiques « honnêtes » du taux (τ_a) de Kendall (voir notes, plus bas)

$n \quad \alpha$	0,005	0,010	0,025	0,050
5	- 1,000	0,800*	0,800	
6	0,867*	0,867	0,733*	0,600*
7	0,810*	0,810	0,619*	0,619
8	0,714*	0,714	0,571*	0,500*
9	0,667*	0,611*	0,556	0,444*
10	0,644	0,600	0,511	0,422*
11	0,600	0,564	0,491	0,418
12	0,576	0,515*	0,455	0,394
13	0,538*	0,487*	0,410*	0,359
14	0,516	0,473	0,407	0,341*
15	0,486*	0,448*	0,390	0,333
16	0,483	0,433	0,367*	0,317
17	0,456*	0,412*	*0,353	0,309
18	0,438*	0,399*	0,346	0,294
19	0,427*	0,392	0,333	0,287
20	0,421	0,379	0,326	0,274
21	0,400*	0,371	0,314	0,267
22	0,394	0,359	0,307	0,255*
23	0,383*	0,352	0,296	0,249*
24	0,377	0,341	0,290	0,246
25	0,367	0,333	0,280*	0,240
30	0,329*	0,301	0,255	0,214*
35	0,304	0,274*	0,234	0,197
40	0,282*	0,256	0,215*	0,182*
45	0,265*	0,240	0,204	0,172
50	0,251*	0,228*	0,192*	0,161*
60	0,227*	0,206*	0,174	0,147
70	0,210	0,190	0,16*	0,135*
80	0,196*	0,177	0,149*	0,126
90	0,184	0,167	0,141	0,118*
100	0,174*	0,158*	0,133*	0,112
150	0,141*	0,128*	0,108	0,091
200	0,122	0,110*	0,093	0,078*

Lecture du tableau 5.

1. Les nombres présentés au tableau 5 sont les valeurs critiques associées à l'aile positive de la distribution du τ_a , déterminées en ce que le complément de leur probabilité cumulative ($1 - pc$) avoisine le seuil α . La distribution du τ étant symétrique autour de 0 (sous l'hypothèse de l'indépendance statistique entre les deux séries), les valeurs critiques de l'aile négative s'obtiennent par un simple changement de signe de la valeur τ ou τ^* présentée.
2. Valeurs précises des τ . Les valeurs du τ telles que présentées au tableau 5 sont arrondies à la 3^e décimale. Pour obtenir une expression plus précise d'un τ donné, il suffit de le multiplier par $1/2 n(n - 1)$, d'arrondir le résultat à l'entier le plus proche, puis de diviser ce dernier par le même facteur. Par exemple, pour le $\tau(n = 10, \alpha = 0,005) \approx 0,644$, nous calculons $0,644 \times 10 \times 9/2 = 28,98 \rightarrow 29$, puis $\tau = 29/(10 \times 9/2) = 0,644444...$ Noter que les valeurs critiques correspondant aux tailles $n = 5$ à $n = 14$ ont été obtenues par un calcul exact (basé sur l'énumération des



$n!$ permutations de série requises. Quant aux valeurs à tailles n excédant 14, elles ont été obtenues par la méthode Monte Carlo (brassage au hasard), au prix de 10 000 000 permutations aléatoires. Une vérification de l'algorithme et de ses extrants nous assure de la justesse de cette procédure.

3. Les valeurs critiques marquées d'un astérisque (*), dites « honnêtes », respectent à 50% ou davantage la condition de probabilité $1 - pc \leq \alpha$, tandis que les valeurs non marquées (dites *strictes*) ont un domaine de probabilité entièrement plus bas que le seuil α (voir texte). L'équation permettant de passer d'une valeur critique « honnête » à une valeur « stricte », soit du τ^* au τ , est simplement $\tau = \tau^* + 4/[n(n-1)/2]$.
4. L'estimation d'une valeur critique $\tau(n)$ entre deux valeurs $\tau(n_1)$ et $\tau(n_2)$ présentées au tableau peut se faire par interpolation harmonique de la racine carrée de n , c.-à-d. $1/\sqrt{n}$. Par exemple, pour estimer $\tau(n = 83, \alpha = 0,01)$ entre 0,177 ($n = 80$) et 0,167 ($n = 90$), nous avons $0,177 + (0,167 - 0,177) \times (1/\sqrt{83} - 1/\sqrt{80}) / (1/\sqrt{90} - 1/\sqrt{80}) \approx 0,17381 \approx 0,174$, la valeur résultante étant juste.

Citation

LAURENCELLE, L. (2022). Le tau de Kendall et deux variantes pour mesurer la cohérence de variation entre deux séries ordinales, leurs propriétés et leurs valeurs critiques "honnêtes". *The Quantitative Methods for Psychology*, 18(2), 196-206. doi :[10.20982/tqmp.18.2.p196](https://doi.org/10.20982/tqmp.18.2.p196)

Copyright © 2022, LAURENCELLE. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) or licensor are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

Received: 27/05/2022 ~ Accepted: 01/06/2022